

Chapter 01

命題代數

- 1.1 命題與真值表
- 1.2 條件命題
- 1.3 命題推理
- 1.4 量 詞

1.1 命題與真值表

命題的意義

定義

凡是能判斷真 (truth ; 記做 T) , 偽 (false ; 記做 F) 之敘述稱為命題(proposition)。

例如

- (1) 「台北在台灣」這個敘述為真(T)。
- (2) 「 $2+3=6$ 」這個敘述為偽(F)。
- (3) 「你好嗎？」這個敘述無法判斷其真偽性故不為命題。

一般而言，驚嘆句、問句等都無法判斷真偽性，故均不為命題。同時，在古典命題代數，命題值只有真、偽二種。

連詞與複合命題

像「 $1+2=3$ 」，「台北在台灣」等命題都是用簡單句來表達的，我們稱之為原子命題(atom proposition)或本原命題(primary proposition)，如果這些原子命題用一些連詞串接起來便成為複合命題(compound proposition)，基本的連詞有(1)否定(negation)(2)且(and)及(3)或(or)三種。

下列都是複合命題的例子：

- 台北在台灣且 $1+1=2$
- (台北在台灣且 $1+1=2$) 或 (台中在日本或 $5-2=6$)

邏輯命題內各原子命題透過連詞作用便產生複合命題，如同原子命題，複合命題的值也只有真(T)、偽(F)兩種。

真值表

我們常用英文字母中 p, q, r, \dots 表示原子命題， p, q, r, \dots 又稱為命題變數(propositional variables)。將有關命題變數之所有可能組合，連同對應之下命題值可形成一個表，這種表就稱為真值表(truth table)。

定理

r 個命題變數之真值表，其可能之命題組合有 2^r 個。

證

因每個命題變數之值有真偽 2 種，故 r 個命題變數之可能值有 2^r 個。

基本連詞

常用的基本連詞有否定、且及或三種，分述如下：

(一) 否定

命題 p 之否定稱為非 p ，記做 $\sim p$ 。若 p 為真(T)時， $\sim p$ 為偽(F)；若 p 為偽(F)時， $\sim p$ 為真(T)，由此，我們可得 $\sim p$ 之真值表為：

| | |
|-----|----------|
| p | $\sim p$ |
| T | F |
| F | T |

例 1

敘述「台北市在台灣」因可辨別真偽故為一命題，依常識，這個命題是「真」(T)，其否定是「台北市不在台灣」，這個命題是「偽」(F)。

(二) 且則

若 p, q 為兩個命題，則 p 且 q 記做 $p \wedge q$ ；只當 p, q 均為真(T)時 $p \wedge q$ 方為真(T)，否則均為偽(F)，其真值表為：

| p | q | $p \wedge q$ |
|-----|-----|--------------|
| T | T | T |
| F | T | F |
| T | F | F |
| F | F | F |

$p \wedge q$ 也稱為 p 與 q 之合取(conjunction)，因此「 \wedge 」也稱為合取算子(conjunction operator)。

例 2

判斷下列命題之真偽性

- (1) 「台北在台灣」且「 $5+2=6$ 」
- (2) 「台北在英國」且「 $5+2=6$ 」
- (3) 「台北在台灣」且「 $5+2=7$ 」

解

- (1) 台北在台灣為真， $5+2=6$ 為偽
 \therefore 「台北在台灣」且「 $5+2=6$ 」為偽

- (2) 台北在英國為偽， $5+2=6$ 為偽
 \therefore 「台北在英國」且「 $5+2=6$ 」為偽
- (3) 台北在台灣為真， $5+2=7$ 為真
 \therefore 「台北在台灣」且「 $5+2=7$ 」為真

(三) 或則

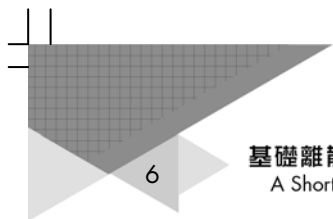
若 p, q 為兩個命題，則 p 或 q 記做 $p \vee q$ ，只有當 p, q 均為偽(F)時， $p \vee q$ 為偽(F)，其餘均為真(T)，其真值表為：

| p | q | $p \vee q$ |
|-----|-----|------------|
| T | T | T |
| F | T | T |
| T | F | T |
| F | F | F |

$p \vee q$ 也稱為 p 與 q 之析取(disjoint)，因此「 \vee 」也稱為析取算子(disjoint operator)。

互斥或(exclusive or)以 $p \oplus q$ 表之，它表示：若 p 或 q 中只有一個為真(T)時，其真值方為真，故 $p \oplus q$ 之真值表為

| p | q | $p \oplus q$ |
|-----|-----|--------------|
| T | T | F |
| F | T | T |
| T | F | T |
| F | F | F |



真值表之進一步例子

例 3

求 $\sim[p \wedge (\sim q)] \vee q$ 真值表。

解

| p | q | \sim | $[p \wedge (\sim q)]$ | \vee | q |
|-----|-----|--------|-----------------------|--------|-----|
| T | T | T | F | F | T |
| F | T | T | F | F | T |
| T | F | F | T | T | F |
| F | F | T | F | T | T |
| ① | ① | ④ | ③ | ② | ⑤ |

表最後一列之①，②，③，④，⑤表示填列之順序，純粹是為方便讀者研習，在實作時可不必寫出。

例 4

求 $(p \vee q) \wedge (\sim p)$ 之真值表。

解

| p | q | $(p \vee q)$ | \wedge | $(\sim p)$ |
|-----|-----|--------------|----------|------------|
| T | T | T | F | F |
| F | T | T | T | T |
| T | F | T | F | F |
| F | F | F | F | T |
| ① | ① | ② | ④ | ③ |

兩個複合命題 $P_1(p_1, p_2 \cdots p_n)$, $P_2(p_1, p_2 \cdots p_n)$, 若 P_1, P_2 在所有指派之真值下均有相同的命題值, 我們稱 P_1 與 P_2 同義, 以 $P_1 \equiv P_2$ 表之。有些書則用 $P_1 \Leftrightarrow P_2$ 表示 P_1 與 P_2 同義, 惟讀者使用「 \Leftrightarrow 」時必須注意:


- \Leftrightarrow 是命題同義之符號。
- \leftrightarrow 是命題公式運算之符號。

例 5

用真值表證明 $\sim(p \vee \sim q) \equiv \sim p \wedge q$ 。

 解

| p | q | $\sim(p \vee \sim q)$ | | | $\sim p \wedge q$ | |
|-----|-----|-----------------------|-----|-----|-------------------|-----|
| T | T | F | T | F | F | F |
| F | T | T | F | F | T | T |
| T | F | F | T | T | F | F |
| F | F | F | T | T | T | F |
| ① | ① | ④ | ③ | ② | ⑤ | ⑥ |



命題代數基本性質

命題代數有一些基本定律, 有助於將複雜的命題結構以代數方式進行化簡, 現將一些重要定律摘錄於下表。表中之 T 為恆真 (tautology), F 為矛盾 (contradiction) 也就是恆不真。

命題代數基本定律表

| | | |
|------|--|--|
| 交換律 | $p \wedge q \equiv q \wedge p$ | $p \vee q \equiv q \vee p$ |
| 結合律 | $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$ | $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$ |
| 等冪律 | $p \wedge p \equiv p$ | $p \vee p \equiv p$ |
| 吸收律 | $p \wedge (p \vee q) \equiv p$ | $p \vee (p \wedge q) \equiv p$ |
| 分配律 | $p \wedge (q \vee r) \equiv$ $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ | $p \vee (q \wedge r) \equiv$ $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ |
| 隸摩根律 | $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ | $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$ |
| 雙重否定 | $\sim(\sim p) \equiv p$ | |
| 同一律 | $p \wedge T \equiv p$ $p \wedge F \equiv F$ | $p \vee F \equiv p$ $p \vee T \equiv T$ |
| 互補律 | $p \wedge \sim p \equiv F$ | $p \vee \sim p \equiv T$ |

讀者可用真值表來證明這些結果。我們將以幾個例子說明上述規則之應用。

例 6

證明 $\sim(p \vee \sim q) \equiv \sim p \wedge q$ 。

解

$$\sim(p \vee \sim q) \equiv \sim p \wedge (\sim(\sim q)) \equiv \sim p \wedge q$$

例 7

證明 $p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q$ 。



$$p \wedge (\sim p \vee q) \equiv (p \wedge \sim p) \vee (p \wedge q) \equiv F \vee (p \wedge q) \equiv p \wedge q$$

對偶性

細心的讀者在「命題代數基本定律表」或可發現到一個有趣的規則：某一定律之 \vee 換成 \wedge ， \wedge 換成 \vee ， T 換成 F ， F 換成 T ，就可得到另外一個定律，這稱為對偶性(duality)。

以分配律 $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ 為例，取 $\wedge \rightarrow \vee$ 、 $\vee \rightarrow \wedge$

則 $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

又如同一律

$p \wedge T \equiv p$ ，取 $\wedge \rightarrow \vee$ ， $T \rightarrow F$ 則

$p \vee F \equiv p$

又如本節例 7， $p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q$ 成立，依對偶性，我們有 $p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q$ 。

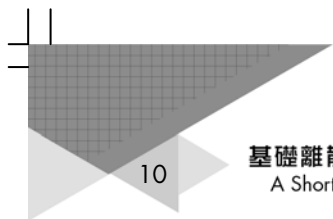
對偶性在爾後之集合論、布林代數等之論證上均極為有用處。

例 8

寫出下列子題之對偶敘述：

(1) $(p \vee q) \wedge \sim (F \vee q)$

(2) $\sim (p \vee q \wedge r) \vee \sim (T \wedge q)$



- (1) $(p \vee q) \wedge \sim (F \vee q)$ 之對偶敘述為
 $(p \wedge q) \vee \sim (T \wedge q)$
- (2) $\sim (p \vee q \wedge r) \vee \sim (T \wedge q)$ 之對偶敘述為
 $\sim (p \wedge q \vee r) \wedge \sim (F \vee q)$

作業 1 A

Homework

求下列(1~4)各題之真值表：

1. $p \vee (\sim p \wedge q)$
2. $\sim[\sim(\sim p)]$
3. $\sim[p \vee (\sim q \wedge p)]$
4. $\sim[\sim p \wedge \sim(p \wedge \sim q)]$
5. p, q, r 為三個命題變數，若已知 p, r 為真， q 為偽求下列的題之真偽值：
 - (1) $\sim p \wedge (q \wedge \sim r)$ ，(2) $(p \wedge q) \vee (\sim p \vee r)$ ，(3) $p \vee (q \wedge r)$ 。
6. 寫出下列子題之對偶敘述：
 - (1) $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q) \vee (p \wedge \sim q)$
 - (2) $(p \wedge q \vee F) \vee (\sim p \vee q) \vee (T \wedge p)$
7. 求(1) $p \vee (p \oplus q)$ 之真值表。
 (2) $\sim p \oplus (p \oplus \sim q)$ 之真值表。
8. 判斷下列複合命題之真偽性
 - (1) $1+1=2$ 或 $2+3=4$
 - (2) $1+1=2$ 且 $2+3=5$
 - (3) $1+2=5$ 或 $2+3=4$
 - (4) $1+3=2$ 或太陽從西邊升起。
 - (5) 太陽從西邊升起或 $2+3=5$
9. 求下列複合命題之真值表
 - (1) $p \oplus p$
 - (2) $p \oplus \sim q$

1.2 條件命題

條件命題之真值表

在日常生活中，我們常會面臨到「在什麼條件下，我們將如何如何」這類問題，本節即討論這類問題之邏輯架構——條件命題(conditional proposition)。 p, q 為二個本原命題，若 p 則 q (if p then q)，記做 $p \rightarrow q$ ，式中 p 稱為前提(antecedent)， q 為結果(concequent)。

定義

▶ 條件命題 $p \rightarrow q$ 之真值表如下：

| p | q | $p \rightarrow q$ |
|-----|-----|-------------------|
| T | T | T |
| F | T | T |
| T | F | F |
| F | F | T |

由 $p \rightarrow q$ 之真值表可知，條件命題之前提為真，其結果必須為真時，該條件命題才為真，若前提為偽，不論其結果是真還是偽，該條件命題均為真。

例 1

下列條件命題除了(2)為偽，其餘均為真。

- | | |
|---------------------|---------------------|
| (1) 若台北在台灣則 $1+5=6$ | (3) 若台北在英國則 $1+5=6$ |
| (2) 若台北在台灣則 $1+5=4$ | (4) 若台北在英國則 $1+5=4$ |

例 2

求 $p \vee q \rightarrow p \wedge q$ 之真值表。

| p | q | $p \vee q$ | \rightarrow | $p \wedge q$ |
|-----|-----|------------|---------------|--------------|
| T | T | T | T | T |
| F | T | T | F | F |
| T | F | T | F | F |
| F | F | F | T | F |
| ① | ① | ② | ④ | ③ |

下面定理是本節關鍵定理之一。

定理

下列三個命題為同義

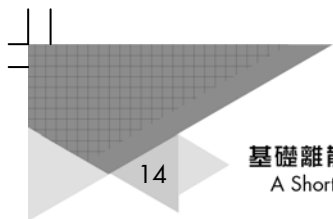
- (1) 若 p 則 q (即 $p \rightarrow q$)
- (2) $\sim p \vee q$
- (3) $\sim q \rightarrow \sim p$

證

我們可建立此三命題之真值表如下：

| p | q | $p \rightarrow q$ | $\sim p \vee q$ | $\sim q \rightarrow \sim p$ |
|-----|-----|-------------------|-----------------|-----------------------------|
| T | T | T | $F \vee T$ | $F \rightarrow F$ |
| F | T | T | $T \vee T$ | $F \rightarrow T$ |
| T | F | F | $F \vee F$ | $T \rightarrow F$ |
| F | F | T | $T \vee T$ | $T \rightarrow T$ |
| ① | ① | ② | ③ ④ | ⑤ ⑦ ⑥ |

↑ ↑ ↑
三行完全相同



由上述結果可知：

$$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$$

複合條件命題之代數運算

利用上列定理，我們可以用代數的方式來化簡一些較為複雜的條件命題。

例 3

試證 $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ 為恆真。



$$\begin{aligned} p \rightarrow (q \rightarrow p) &\equiv \sim p \vee (\sim q \vee p) \equiv \sim p \vee (p \vee \sim q) \equiv (\sim p \vee p) \vee \sim q \\ &\equiv T \vee \sim q \equiv T \end{aligned}$$

例 4

試證 $(p \rightarrow q) \rightarrow q \equiv p \vee q$ 。



$$\begin{aligned} (p \rightarrow q) \rightarrow q &\equiv \sim(\sim p \vee q) \vee q \equiv (p \wedge \sim q) \vee q \\ &\equiv (p \vee q) \wedge (\sim q \vee q) \equiv (p \vee q) \wedge T \equiv p \vee q \end{aligned}$$

雙條件命題真值表

「若且惟若 p 則 q 」 (if and only if p then q ，通常以 $p \leftrightarrow q$ 或 $p \text{ iff } q$ 表之)，是一個雙條件命題(biconditional proposition)， $p \leftrightarrow q$ 之真值表為：

| p | q | $p \leftrightarrow q$ |
|-----|-----|-----------------------|
| T | T | T |
| F | T | F |
| T | F | F |
| F | F | T |

即此雙條件命題只當 p, q 有相同之真偽值時， $p \leftrightarrow q$ 才為真。我們也可說 $p \leftrightarrow q$ 為真時必須 $p \rightarrow q$ 為真且 $q \rightarrow p$ 亦為真。

例 5

試證 $p \leftrightarrow (p \wedge q) \equiv \sim p \vee q \equiv p \rightarrow q$ 。

解

$$\begin{aligned}
 p \leftrightarrow (p \wedge q) &\equiv (p \rightarrow (p \wedge q)) \wedge ((p \wedge q) \rightarrow p) \\
 &\equiv (\sim p \vee (p \wedge q)) \wedge (\sim (p \wedge q) \vee p) \\
 &\equiv [(\sim p \vee p) \wedge (\sim p \vee q)] \wedge [(\sim p \vee \sim q) \vee p] \\
 &\equiv [T \wedge (\sim p \vee q)] \wedge [(\sim p \vee \sim q) \vee p] \\
 &\equiv (\sim p \vee q) \wedge [\sim q \vee (\sim p \vee p)] \\
 &\equiv (\sim p \vee q) \wedge [\sim q \vee T] \\
 &\equiv (\sim p \vee q) \wedge T \\
 &\equiv \sim p \vee q \\
 &\equiv p \rightarrow q
 \end{aligned}$$

我們可用真值表證明如下：

| p | q | $p \leftrightarrow (p \wedge q)$ | | $\sim p$ | $\vee q$ | $p \rightarrow q$ |
|-----|-----|----------------------------------|-----|----------|----------|-------------------|
| T | T | T | T | F | T | T |
| F | T | T | F | T | T | T |
| T | F | F | F | F | F | F |
| F | F | T | F | T | T | T |

相同

逆命題、否命題與逆否命題

定義

給定條件命題 $p \rightarrow q$ 我們稱 $p \rightarrow q$ 為原命題，其逆命題 (converse) 為 $q \rightarrow p$ ，否命題 (inverse) 為 $\sim p \rightarrow \sim q$ 。逆否命題 (contrapositive) 為 $\sim q \rightarrow \sim p$ 。

原命題、逆命題、否命題與逆否命題之真值表如下，由真值表可知，原命題與逆否命題為等價：

| p | q | 原命題 $p \rightarrow q$ | 逆命題 $q \rightarrow p$ | 否命題 $\sim p \rightarrow \sim q$ | 逆否命題 $\sim q \rightarrow \sim p$ |
|-----|-----|--------------------------|--------------------------|------------------------------------|-------------------------------------|
| T | T | T | T | T | T |
| F | T | T | F | F | T |
| T | F | F | T | T | F |
| F | F | T | T | T | T |

例 6

二個命題 p ：台北在台灣， q ： $5+2=8$ 則

- (1) 條件命題 $p \rightarrow q$ 「若台北在台灣則 $5+2=8$ 」
- (2) 逆命題 $q \rightarrow p$ 為「若 $5+2=8$ 則台北在台灣」
- (3) 否命題 $\sim p \rightarrow \sim q$ 為「若台北不在台灣則 $5+2 \neq 8$ 」
- (4) 逆否命題 $\sim q \rightarrow \sim p$ 為「若 $5+2 \neq 8$ 則台北不在台灣」。

例 6 中僅(1)為偽。

反證法

我們常需證明「若 p 則 q 」形式之命題，如「若 $x > 2$ 則 $x^3 > 8$ 」，一般都是在 p 之假設下推證出 q 成立，但有時這種推證法並非容易，此時我們便可用反證法，反證法是令 q 為偽（即 $\sim q$ ），逐步推證出 p 不成立即 $\sim p$ 為真，從而得到與已知之事實互相矛盾的結果。

例 7

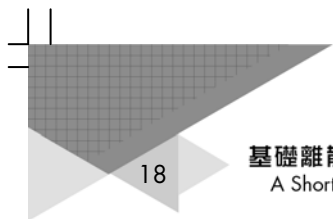
a, b 為二正數，若 $k \leq ab$ ，試證 $a \leq \sqrt{k}$ 或 $b \leq \sqrt{k}$ 。

【分析】

本例直接證明可能會有困難，因此我們試用反證法：令 p_1 表示敘述「 $a \leq \sqrt{k}$ 」， p_2 表示敘述「 $b \leq \sqrt{k}$ 」，因為

$$\sim(p_1 \vee p_2) \equiv \sim p_1 \wedge \sim p_2 \quad \therefore p_1 \vee p_2 \equiv \sim(\sim p_1 \wedge \sim p_2)$$

$$\sim p_1 \text{ 為 } a > \sqrt{k}, \quad \sim p_2 \text{ 為 } b > \sqrt{k}$$

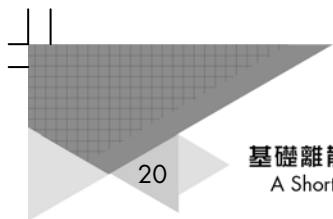


解

設 $a > \sqrt{k}$ 且 $b > \sqrt{k}$ 則 $a \cdot b > \sqrt{k} \cdot \sqrt{k} = k$ ，此與已知條件 $ab \leq k$ 矛盾， $\therefore ab \geq k$ 時我們有 $a \leq \sqrt{k}$ 或 $b \leq \sqrt{k}$ 。

作業 1 B
Homework

- 試用真值表與命題代數法證明下列命題為恆真：
 - $p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow 7$
 - $\sim p \rightarrow (p \rightarrow q)$
 - $p \rightarrow [q \rightarrow (p \wedge q)]$
- 用命題 p ：學費貴， q ：老師好， r ：市面上參考書少，表示下列複合命題
 - 若學費貴或老師好則市面上參考書少
 - 惟若老師好則市面上參考書少
 - 老師好之必要條件是學費貴
 - 市面上參考書多之充分條件是老師差
- 用真值表證明：
 - $(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow q) \equiv (p \vee r) \rightarrow q$
 - $p \rightarrow (q \vee r) \equiv (p \wedge \sim q) \rightarrow r$
- 用命題代數法試證明：
 - $(p \rightarrow q) \rightarrow q \equiv p \vee q$
 - $p \rightarrow (q \vee r) \equiv (p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$
- 用反證法證明：若 $m > 2$ 且 $n > 2$ 則 $m+n > mn$ ， m, n 為正整數。
- 求 $p \rightarrow (q \oplus \sim r)$ 之真值表。
- 寫出命題「 $(p \vee \sim q) \rightarrow \sim r$ 」之逆命題、否命題與逆否命題。



8. 設 a_1, a_2, \dots, a_5 均為正數，若 $a_1 + a_2 + \dots + a_5 = 13$ ，且 $a_1 a_2 \dots a_5 = 6$ ，試證 a_1, a_2, \dots, a_5 中至少有一個數 ≤ 1
9. 設 $\triangle ABC$ 為銳角三角形，若 $\angle A > \angle B > \angle C$ ，求證 $\angle B > 45^\circ$ 。
10. a, b 為實數，若 $a^3 + b^3 = -3$ ，求證 $a + b \leq 1$ 。