Chapter 01

命題代數

1.1 命題與真值表

命題的意義

定義

凡是能判斷真（truth；**記做** T），偽（false；**記做** F）**之敘述稱為**命題(proposition)。

例如

(1) 「台北在台灣」這個敘述為真(T)。

(2) 「2+3=6」這個敘述為偽(F)。

(3) 「你好嗎？」這個敘述無法判斷其真偽性故不為命題。

一般而言，驚嘆句、問句等都無法判斷真偽性，故均不為命題。同時，在古典命題代數，命題值只有真、偽二種。

連詞與複合命題

像「1+2=3」，「台北在台灣」等命題都是用簡單句來表達的，我們稱之為**原子命題**(atom proposition)或**本原命題**(primary proposition)，如果這些原子命題用一些連詞串接起來便成為**複合命題**(compound proposition)，基本的連詞有(1)**否定**(negation)(2)**且**(and)及(3)**或**(or)三種。

下列都是複合命題的例子：

- 台北在台灣且 1+1=2
- （台北在台灣且 1+1=2）或（台中在日本或 5−2=6）

邏輯命題內各原子命題透過連詞作用便產生複合命題，如同原子命題，複合命題的值也只有**真**(T)、**偽**(F)兩種。

真值表

我們常用英文字母中 $p, q, r,$ …表示原子命題，$p, q, r,$ …又稱為**命題變數**(propositional variables)。將有關命題變數之所有可能組合，連同對應之下命題值可形成一個表，這種表就稱為**真值表**(truth table)。

定理

r 個命題變數之真值表，其可能之命題組合有 2^r 個。

證

因每個命題變數之值有真偽 2 種，故 r 個命題變數之可能值有 2^r 個。

基本連詞

常用的基本連詞有否定、且及或三種，分述如下：

(一) 否定

命題 p 之否定稱為非 p，記做~p。若 p 為真(T)時，~p 為偽(F)；若 p 為偽(F)時，~p 為真(T)，由此，我們可得~p 之真值表為：

p	$\sim p$
T	F
F	T

例 1

敘述「台北市在台灣」因可辨別真偽故為一命題，依常識，這個命題是「真」(T)，其否定是「台北市不在台灣」，這個命題是「偽」(F)。

(二) 且則

若 p, q 為兩個命題，則 p 且 q 記做 $p \wedge q$；只當 p, q 均為真(T)時 $p \wedge q$ 方為真(T)，否則均為偽(F)，其真值表為：

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
F	T	F
T	F	F
F	F	F

$p \wedge q$ 也稱為 p 與 q 之**合取**(conjunction)，因此「$\wedge$」也稱為**合取算子**(conjunction operator)。

例 2

判斷下列命題之真偽性

(1)「台北在台灣」且「5+2=6」

(2)「台北在英國」且「5+2=6」

(3)「台北在台灣」且「5+2=7」

解

(1) 台北在台灣為真，5+2=6 為偽

∴「台北在台灣」且「5+2=6」為偽

(2) 台北在英國為偽，5+2=6 為偽

∴「台北在英國」且「5+2=6」為偽

(3) 台北在台灣為真，5+2=7 為真

∴「台北在台灣」且「5+2=7」為真

(三) 或則

若 p, q 為兩個命題，則 p 或 q 記做 $p \vee q$，只有當 p, q 均為偽(F)時，$p \vee q$ 為偽(F)，其餘均為真(T)，其真值表為：

p	q	$p \vee q$
T	T	T
F	T	T
T	F	T
F	F	F

$p \vee q$ 也稱為 p 與 q 之**析取**(disjoint)，因此「$\vee$」也稱為**析取算子**(disjoint operator)。

互斥或(exclusive or)以 $p \oplus q$ 表之，它表示：若 p 或 q 中只有一個為真(T)時，其真值方為真，故 $p \oplus q$ 之真值表為

p	q	$p \oplus q$
T	T	F
F	T	T
T	F	T
F	F	F

真值表之進一步例子

例 3

求$\sim[p\wedge(\sim q)]\vee q$ 真值表。

解

p	q	$\sim$	$[p$	$\wedge$	$($	$\sim$	$q)]$	$\vee$	q
T	T	T		F		F		T	
F	T	T		F		F		T	
T	F	F		T		T		F	
F	F	T		F		T		T	
①	①	④		③		②		⑤	

表最後一列之①，②，③，④，⑤表示填列之順序，純粹是為方便讀者研習，在實作時可不必寫出。

例 4

求$(p\vee q)\wedge(\sim p)$之真值表。

解

p	q	$(p\vee q)$	$\wedge$	$($	$\sim$	$p)$
T	T	T	F		F	
F	T	T	T		T	
T	F	T	F		F	
F	F	F	F		T	
①	①	②	④		③	

兩個複合命題 $P_1(p_1, p_2 \cdots p_n)$，$P_2(p_1, p_2 \cdots p_n)$，若 P_1, P_2 在所有指派之真值下均有相同的命題值，我們稱 P_1 與 P_2 同義，以 $P_1 \equiv P_2$ 表之。有些書則用 $P_1 \Leftrightarrow P_2$ 表示 P_1 與 P_2 同義，惟讀者使用「 $\Leftrightarrow$ 」時必須注意：

- $\Leftrightarrow$是命題同義之符號。
- $\leftrightarrow$是命題公式運算之符號。

例 5

用真值表證明$\sim(p \vee \sim q) \equiv \sim p \wedge q$ 。

解

p	q	$\sim$	$(p \vee$	$\sim q)$	$\sim p$	$\wedge\ q$
T	T	F	T	F	F	F
F	T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	T	F	F
F	F	F	T	T	T	F
①	①	④	③	②	⑤	⑥

二行相同

命題代數基本性質

命題代數有一些基本定律，有助於將複雜的命題結構以代數方式進行化簡，現將一些重要定律摘錄於下表。表中之 T 為**恆真**(tautology)，F 為**矛盾**(contradiction)也就是恆不真。

命題代數基本定律表

交換律	$p \wedge q \equiv q \wedge p$	$p \vee q \equiv q \wedge p$
結合律	$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$	$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$
等冪律	$p \wedge p \equiv p$	$p \vee p \equiv p$
吸收律	$p \wedge (p \vee q) \equiv p$	$p \vee (p \wedge q) \equiv p$
分配律	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
隸摩根律	$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$	$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$
雙重否定	$\sim(\sim p) \equiv p$	
同一律	$p \wedge T \equiv p$	$p \vee F \equiv p$
	$p \wedge F \equiv F$	$p \vee T \equiv T$
互補律	$p \wedge \sim p \equiv F$	$p \vee \sim p \equiv T$

讀者可用真值表來證明這些結果。我們將以幾個例子說明上述規則之應用。

例 6

證明$\sim(p \vee \sim q) \equiv \sim p \wedge q$。

解

$$\sim(p \vee \sim q) \equiv \sim p \wedge (\sim(\sim q)) \equiv \sim p \wedge q$$

例 7

證明 $p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q$。

解

$$p\wedge(\sim p\vee q)\equiv(p\wedge\sim p)\vee(p\wedge q)\equiv F\vee(p\wedge q)\equiv p\wedge q$$

對偶性

細心的讀者在「命題代數基本定律表」或可發現到一個有趣的規則：某一定律之$\vee$換成$\wedge$，$\wedge$換成$\vee$，T 換成F，F 換成T，就可得到另外一個定律，這稱為**對偶性**(duality)。

以分配律 $p\wedge(q\vee r)\equiv(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$為例，取$\wedge\to\vee$、$\vee\to\wedge$

則 $p\vee(q\wedge r)\equiv(p\vee q)\wedge(p\vee r)$

又如同一律

$p\wedge T\equiv p$，取$\wedge\to\vee$，$T\to F$ 則

$p\vee F\equiv p$

又如本節例 7，$p\wedge(\sim p\vee q)\equiv p\wedge q$成立，依對偶性，我們有 $p\vee(\sim p\wedge q)\equiv p\vee q$。

對偶性在爾後之集合論、布林代數等之論證上均極為有用處。

例 8

寫出下列子題之對偶敘述：

(1) $(p\vee q)\wedge\sim(F\vee q)$

(2) $\sim(p\vee q\wedge r)\vee\sim(T\wedge q)$

解

(1) $(p \vee q) \wedge \sim (F \vee q)$ 之對偶敘述為

$(p \wedge q) \vee \sim (T \wedge q)$

(2) $\sim (p \vee q \wedge r) \vee \sim (T \wedge q)$ 之對偶敘述為

$\sim (p \wedge q \vee r) \wedge \sim (F \vee q)$

作業 1A
Homework

求下列(1～4)各題之真值表：

1. $p \vee (\sim p \wedge q)$　　2. $\sim[\sim(\sim p)]$

3. $\sim[p \vee (\sim q \wedge p)]$　　4. $\sim[\sim p \wedge \sim(p \wedge \sim q)$

5. p, q, r 為三個命題變數，若已知 p, r 為真，q 為偽求下列的題之真偽值：
(1)$\sim p \wedge (q \wedge \sim r)$，(2)$(p \wedge q) \vee (\sim p \vee r)$，(3)$p \vee (q \wedge r)$。

6. 寫出下列子題之對偶敘述：
(1) $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q) \vee (p \wedge \sim q)$
(2) $(p \wedge q \vee F) \vee (\sim p \vee q) \vee (T \wedge p)$

7. 求(1) $p \vee (p \oplus q)$ 之真值表。
(2) $\sim p \oplus (p \oplus \sim q)$ 之真值表。

8. 判斷下列複合命題之真偽性
(1) $1+1=2$ 或 $2+3=4$
(2) $1+1=2$ 且 $2+3=5$
(3) $1+2=5$ 或 $2+3=4$
(4) $1+3=2$ 或太陽從西邊升起。
(5) 太陽從西邊升起或 $2+3=5$

9. 求下列複合命題之真值表
(1) $p \oplus p$
(2) $p \oplus \sim q$

1.2 條件命題

條件命題之真值表

在日常生活中，我們常會面臨到「在什麼條件下，我們將如何如何」這類問題，本節即討論這類問題之邏輯架構——**條件命題**(conditional proposition)。p, q 為二個本原命題，**若 p 則 q**(if p then q)，記做 $p \to q$，式中 p 稱為**前提**(antecedent)，q 為**結果**(concequent)。

定義

條件命題 $p \to q$ 之真值表如下：

p	q	$p \to q$
T	T	T
F	T	T
T	F	F
F	F	T

由 $p \to q$ 之真值表可知，條件命題之前提為真，其結果必須為真時，該條件命題才為真，若前提為偽，不論其結果是真還是偽，該條件命題均為真。

例 1

下列條件命題除了(2)為偽，其餘均為真。

(1) 若台北在台灣則 1+5=6

(2) 若台北在台灣則 1+5=4

(3) 若台北在英國則 1+5=6

(4) 若台北在英國則 1+5=4

例 2

求 $p \vee q \rightarrow p \wedge q$ 之真值表。

p	q	$p \vee q$	$\rightarrow$	$p \wedge q$
T	T	T	T	T
F	T	T	F	F
T	F	T	F	F
F	F	F	T	F
①	①	②	④	③

下面定理是本節關鍵定理之一。

定理

下列三個命題為同義

(1)**若** p **則** q **（即** $p \rightarrow q$**）**

(2)$\sim p \vee q$

(3)$\sim q \rightarrow \sim p$

證 我們可建立此三命題之真值表如下：

p	q	$p \longrightarrow q$	$\sim p$	$\vee\ q$	$\sim q$	$\longrightarrow$	$\sim p$
T	T	T	F	T	F	T	F
F	T	T	T	T	F	T	T
T	F	F	F	F	T	F	F
F	F	T	T	T	T	T	T
①	①	②	③	④	⑤	⑦	⑥

三行完全相同

由上述結果可知：

$p \to q \equiv \sim p \vee q \equiv \sim q \to \sim p$

複合條件命題之代數運算

利用上列定理，我們可以用代數的方式來化簡一些較為複雜的條件命題。

例 3

試證 $p \to (q \to p)$為恆真。

解

$$p \to (q \to p) \equiv \sim p \vee (\sim q \vee p) \equiv \sim p \vee (p \vee \sim q) \equiv (\sim p \vee p) \vee \sim q$$
$$\equiv T \vee \sim q \equiv T$$

例 4

試證$(p \to q) \to q \equiv p \vee q$。

解

$$(p \to q) \to q \equiv \sim(\sim p \vee q) \vee q \equiv (p \wedge \sim q) \vee q$$
$$\equiv (p \vee q) \wedge (\sim q \vee q) \equiv (p \vee q) \wedge T \equiv p \vee q$$

雙條件命題真值表

「**若且惟若 $\boldsymbol{p}$ 則 $\boldsymbol{q}$**」（if and only if p then q，通常以 $p\leftrightarrow q$ 或 p iff q 表之），是一個**雙條件命題**(biconditional proposition)，$p\leftrightarrow q$ 之真值表為：

p	q	$p\leftrightarrow q$
T	T	T
F	T	F
T	F	F
F	F	T

即此雙條件命題只當 p, q 有相同之真偽值時，$p\leftrightarrow q$ 才為真。我們也可說 $p\leftrightarrow q$ 為真時必須 $p\to q$ 為真且 $q\to p$ 亦為真。

例 5

試證 $p\leftrightarrow(p\wedge q)\equiv\sim p\vee q\equiv p\to q$。

解

$$
\begin{aligned}
p\leftrightarrow(p\wedge q)&\equiv\big(p\to(p\wedge q)\big)\wedge\big((p\wedge q)\to p\big)\\
&\equiv\big(\sim p\vee(p\wedge q)\big)\wedge\big(\sim(p\wedge q)\vee p\big)\\
&\equiv[(\sim p\vee p)\wedge(\sim p\vee q)]\wedge[(\sim p\vee\sim q)\vee p]\\
&\equiv[T\wedge(\sim p\vee q)]\wedge[(\sim p\vee\sim q)\vee p]\\
&\equiv(\sim p\vee q)\wedge[\sim q\vee(\sim p\vee p)]\\
&\equiv(\sim p\vee q)\wedge[\sim q\vee T]\\
&\equiv(\sim p\vee q)\wedge T\\
&\equiv\sim p\vee q\\
&\equiv p\to q
\end{aligned}
$$

我們可用真值表證明如下：

p	q	$p\leftrightarrow$	$(p\wedge q)$	$\sim p$	$\vee q$	$p\to q$
T	T	T	T	F	T	T
F	T	T	F	T	T	T
T	F	F	F	F	F	F
F	F	T	F	T	T	T

相同

逆命題、否命題與逆否命題

定義

給定條件命題 $p\to q$ **我們稱** $p\to q$ **為**原命題**，其**逆命題(converse)**為** $q\to p$**，**否命題(inverse)**為**$\sim p\to\sim q$**。**逆否命題(contrapositive)**為**$\sim q\to\sim p$。

原命題、逆命題、否命題與逆否命題之真值表如下，由真值表可知，原命題與逆否命題為等價：

		原命題	逆命題	否命題	逆否命題
p	q	$p\to q$	$q\to p$	$\sim p\to\sim q$	$\sim q\to\sim p$
T	T	T	T	T	T
F	T	T	F	F	T
T	F	F	T	T	F
F	F	T	T	T	T

例 6

二個命題 p：台北在台灣，q：5+2=8 則

(1) 條件命題 $p \to q$「若台北在台灣則 5+2=8」

(2) 逆命題 $q \to p$ 為「若 5+2=8 則台北在台灣」

(3) 否命題 $\sim p \to \sim q$ 為「若台北不在台灣則 $5+2 \neq 8$」

(4) 逆否命題 $\sim q \to \sim p$ 為「若 $5+2 \neq 8$ 則台北不在台灣」。

例 6 中僅(1)為偽。

反證法

我們常需證明「若 p 則 q」形式之命題，如「若 $x>2$ 則 $x^3>8$」，一般都是在 p 之假設下推證出 q 成立，但有時這種推證法並非容易，此時我們便可用反證法，反證法是令 q 為偽（即 $\sim q$），逐步推證出 p 不成立即 $\sim p$ 為真，從而得到與已知之事實互相矛盾的結果。

例 7

a, b 為二正數，若 $k \leq ab$，試證 $a \leq \sqrt{k}$ 或 $b \leq \sqrt{k}$ 。

【分析】

本例直接證明可能會有困難，因此我們試用反證法：令 p_1 表示敘述「$a \leq \sqrt{k}$」，p_2 表示敘述「$b \leq \sqrt{k}$」，因為

$$\sim(p_1 \vee p_2) \equiv \sim p_1 \wedge \sim p_2 \qquad \therefore p_1 \vee p_2 \equiv \sim(\sim p_1 \wedge \sim p_2)$$

$\sim p_1$ 為 $a>\sqrt{k}$，$\sim p_2$ 為 $b>\sqrt{k}$

解

設 $a>\sqrt{k}$ 且 $b>\sqrt{k}$ 則 $a \cdot b>\sqrt{k} \cdot \sqrt{k}=k$，此與已知條件 $ab\le k$ 矛盾，$\therefore ab\ge k$ 時我們有 $a\le\sqrt{k}$ 或 $b\le\sqrt{k}$。

作業 1B Homework

1. 試用真值表與命題代數法證明下列命題為恆真：

   (1) $p\wedge(p\to q)\to 7$

   (2) $\sim p\to(p\to q)$

   (3) $p\to[q\to(p\wedge q)]$

2. 用命題 p：學費貴，q：老師好，r：市面上參考書少，表示下列複合命題

   (1) 若學費貴或老師好則市面上參考書少

   (2) 惟若老師好則市面上參考書少

   (3) 老師好之必要條件是學費貴

   (4) 市面上參考書多之充分條件是老師差

3. 用真值表證明：

   (1) $(p\to q)\wedge(r\to q)\equiv(p\vee r)\to q$

   (2) $p\to(q\vee r)\equiv(p\wedge\sim q)\to r$

4. 用命題代數法試證明：

   (1) $(p\to q)\to q\equiv p\vee q$

   (2) $p\to(q\vee r)\equiv(p\to q)\to(p\to r)$

5. 用反證法證明：若 $m>2$ 且 $n>2$ 則 $m+n>mn$，m, n 為正整數。

6. 求 $p\to(q\oplus\sim r)$之真值表。

7. 寫出命題「$(p\vee\sim q)\to\sim r$」之逆命題、否命題與逆否命題。

8. 設 $a_1, a_2, \cdots, a_5$ 均為正數，若 $a_1 + a_2 + \cdots a_5 = 13$，且 $a_1 a_2 \cdots a_5 = 6$，試證 $a_1, a_2 \cdots a_5$ 中至少有一個數 ≤ 1

9. 設 ΔABC 為銳角三角形，若 $\angle A > \angle B > \angle C$ ，求證 $\angle B > 45°$ 。

10. a, b 為實數，若 $a^3 + b^3 = -3$ ，求證 $a + b \leq 1$ 。