Chapter 1

振動學基本概念

振動學的主要目的在於探討結構承受動態負載（dynamic loadings）時，其所產生的動態反應（dynamic responses）。其中，結構可以是任何機械、器具、建築物、...等，而動態反應通常是指結構的自然頻率（natural frequency）、振態（mode shape）或上述結構之位移對時間的歷程（displacement-time histories）。此外，所謂動態負載是指隨時間改變的負載（例如：外力 $p(t) \neq$ 常數）。在進入本書後續各章節之前，本章將先介紹一些與振動力學相關的專門名詞（terminology）、簡諧運動的一些特性及進行振動分析的基本流程，以使讀者往後能順利進入振動學的領域。

1.1 振動學的重要名詞

1.1.1 自由振動（free vibration）

一個結構系統在未承受任何外部負載作用的情形下，由於初始位移（initial displacement）及（或）初始速度（initial velocity）的存在，使得整個結構系統的動能（kinetic energy）與勢能（potential energy）作週期性的轉換，以至於整個結構系統作重複的運動，這種現象稱為自由振動（參考圖1.1）。

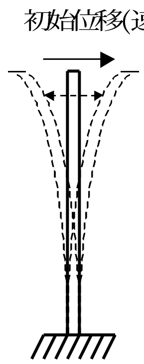


圖1.1　由初始位移（或速度）所引起的結構自由振動

1.1.2 自然頻率（natural frequency）

結構系統處於自由振動情況時，單位時間內的往復次數稱為該系統的自然頻率。一個結構系統的自然頻率個數等於該系統的自由度總數，一般而言，最低的那個自然頻率最為重要，因此，這個自然頻率又稱基本頻率（fundamental frequency）。常用的自然頻率單位有cycles/sec（cps或Hz）與rad/sec，前者稱為循環頻率（cyclic frequency），常以符號 f 表示，而後者稱

為圓頻率（circular frequency），常以符號 ω 表示。因為轉動一週（cycle）為 2π 弧度（radian），所以 f 與 ω 具有下列關係：

$$\omega = 2\pi f \tag{1.1}$$

或

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \tag{1.2}$$

1.1.3 週期性運動（periodic motion）

一個結構系統的運動若每隔時間 τ 即重複一次，則此種運動稱為週期性運動，而時間 τ 稱為週期（period），它與頻率 f 具有下列的關係：

$$f = \frac{1}{\tau} \tag{1.3}$$

或

$$\tau = \frac{1}{f} \tag{1.4}$$

週期性運動可分為兩大類型：(a)簡單週期性運動（simple periodic motion），(b)複雜週期性運動（complex periodic motion）。簡諧運動（simple harmonic motion）即屬前者，而汽缸內活塞的往復運動即屬後者。

1.1.4 振態（mode shape）

所謂振態就是當結構系統處於自由振動的情形下，將結構上所有的點於某一特定頻率的振動振幅用曲線畫出來，而這些曲線可以用來表示結構系統於某一特定自然頻率的振動形勢（或位移變位）（參考圖1.2）。

圖1.2所示為簡支樑（simply supported beam）於某一特定自然頻率的振動情形。在圖中，曲線（---）即為簡支樑的振態，而箭號為振幅，很明顯的，此簡支樑正以 A 點為中心點進行俯仰運動（pitching motion），由於在自由振動的過程中，A 點於任意時間 t 的位移為零，所以 A 點又稱為節點（node）。

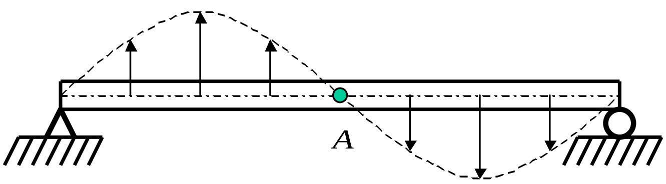


圖1.2　簡支樑的某一振態

1.1.5 動態負載（dynamic load）

負載係指一具有大小、方向及作用點的向量，故任一負載只要其大小、方向或作用點隨著時間而變均屬動態負載。動態負載的型態可分為：(a) 週期性動態負載與(b)非週期性動態負載。週期性動態負載一般是指負載大小及（或）負載作用位置呈週期性變化，而非週期性動態負載一般是指負載大小或負載作用位置呈非週期性變化。週期性動態負載通常由機械系統所產生（例如：不平衡轉子所產生的激振負載），而非週期性動態負載通常由不可預期的外在因素所產生（例如：地震對結構物所產生的激振負載）。上述兩種類型之動態負載的大小對時間的歷程可參考圖1.3。

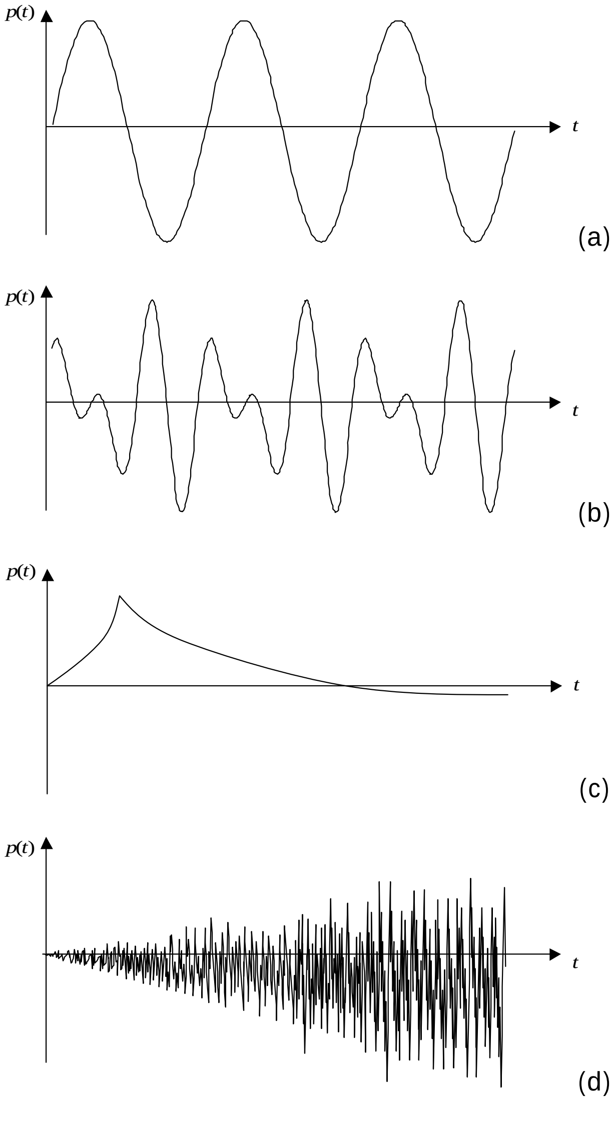


圖1.3　動態負載的型態：(a)週期性，(b)週期性，(c)非週期性，(d)非週期性

1.1.6 強迫振動（forced vibration）

一個結構系統在外施動態負載（external dynamic load）作用下（參考圖1.4），所引起的運動稱為強迫振動。一般而言，通常用結構之位移對時間的歷程（displacement-time histories）來描述結構系統的強迫振動特性，當然，在某些情形下，也可以用速度（或加速度）對時間的歷程來描述結構系統的強迫振動行為。

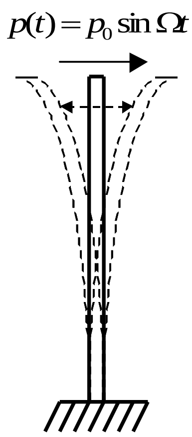


圖1.4　由外施動態負載 $p(t) = p_0 \sin \Omega t$ 所引起之結構系統強迫振動反應

1.1.7 動態反應（dynamic responses）

結構系統的自由振動特性（free vibration characteristics）與強迫振動特性（forced vibration characteristics）皆為結構系統之動態反應的成份之一。因此，動態反應包括了：結構系統的自然頻率、振態、位移對時間的歷程、速度對時間的歷程、加速度對時間的歷程...等。

1.1.8 共振（resonance）

一個結構系統之強迫振動反應的大小與許多因素有關，但其中最重要的因素是外部動態負載的頻率 Ω 與結構系統的自然頻率 ω 之比值 β。若 $\beta = \Omega/\omega$，則當 $\beta = 1$時（即 $\Omega = \omega$），結構系統的強迫振動反應將會達其極大值，此種現象稱為共振。一般而言，$\beta = \Omega/\omega$ 稱為頻率比（frequency ratio），而 Ω 則稱為外部動態負載的激振頻率（exciting frequency）。

1.1.9 阻尼（damping）

一般而言，任何實際結構系統處於自由振動情形時，其振動振幅（amplitude）均會隨著時間而逐漸衰減（decay），直到最後整個結構系統會

靜止下來，這就是因為結構系統在運動的過程中遭受到或多或少的摩擦（friction）或阻力（resistance），而消耗了結構系統的動能所致。此種消耗結構系統之振動能量的機構（mechanism）稱為阻尼。一般結構系統的阻尼通常很小，因此它對結構系統的自然頻率與強迫振動反應的影響不大，但在共振時，微小的阻尼卻足以使強迫振動反應的極大值大為降低，因此，阻尼通常僅在共振頻率附近時才能顯示其重要性。一個結構系統的阻尼大到某定值時，該系統便不會有自由振動的現象，該定值稱為系統的臨界阻尼（critical damping）。換言之，若令 $c_c = 2\sqrt{km}$ 表臨界阻尼，而 c 表系統的實際阻尼，則當 $c < c_c$ 時，系統在受到干擾後便會產生自由振動，但若 $c > c_c$，則系統在受到干擾而偏離其靜平衡位置（static equilibrium position，S.E.P.）後，若不再受任何干擾，則系統便緩慢回復到它的靜平衡位置，而不會有自由振動的現象產生。

1.1.10 自由度（degree of freedom）

描述一個結構系統在振動過程中之任何時刻的形勢（configuration），所需之最少獨立座標數稱為該系統的自由度。一般而言，實際結構物的質量通常為連續分佈，所以理論上，結構系統在振動過程中之任何時刻的形勢必須用無限多個獨立座標來描述，所以有無限多個自由度。但是結構物如果可以經由適當的假設而簡化，則可用有限個自由度來描述結構物於任何時刻的形勢。

如圖1.5所示，對一個毫無拘束的質點（unconstrained particle）而言，任何時刻在三維空間的位置必須要用三個獨立座標（x、y 與 z）才能確定，所以此質點有三個自由度。但是對一個毫無拘束的剛體（unconstrained rigid-body）而言，其於任何時刻在三維空間的位置，則須用六個獨立座標（x、y、z、θ_x、θ_y 與 θ_z）才能確定，所以此剛體具有六個自由度。上述之 x、y 與 z 表相對於某個固定參考座標系統（fixed reference coordinate system）x、y、z 的移動位移或線性位移（translational or linear displacements），而 θ_x、θ_y 與 θ_z 則表相對於 x、y 與 z 軸的轉動位移或角位移（rotational or angular displacements）。

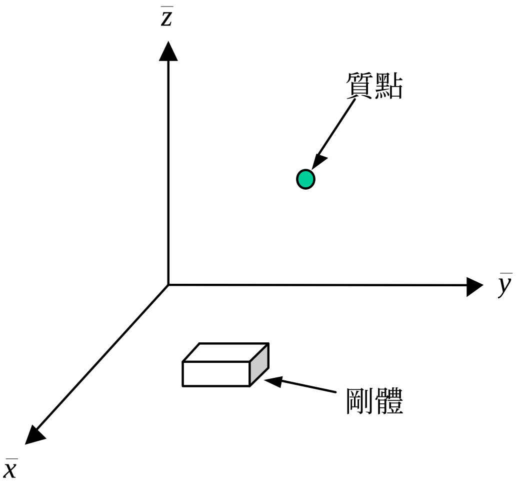


圖1.5　空間中毫無拘束的質點與剛體

如圖1.6所示，兩個物塊懸吊於兩根連桿的末端，如果物塊與連桿的質量呈連續分佈，則此複擺系統有無限多個自由度。如果連桿的質量遠輕於物塊的質量，且兩個物塊的剛性很大，則連桿的質量可忽略不計，且兩個物塊可視為剛體，此時，圖1.6所示之複擺系統的自由度為12個（每個剛體有6個自由度，包括3個移動座標 x、y、z 與3個轉動座標 θ_x、θ_y、θ_z）。如果兩物塊的體積效應可以忽略，則上述兩物塊可視為兩個集結質量（lumped mass），此時，圖1.6所示之複擺系統的自由度為6個（每個集結質量有3個自由度，包括 x、y、z 等3個移動座標）。如果兩根連桿皆為不可伸縮的剛性桿，且複擺只限制在 $\bar{y}\,\bar{z}$ 平面內擺動，此時，圖1.6所示之複擺系統的自由度為2個（即兩根連桿相對於 $\bar{x}$ 軸的轉動角位移 θ_{x1}、θ_{x2}）。

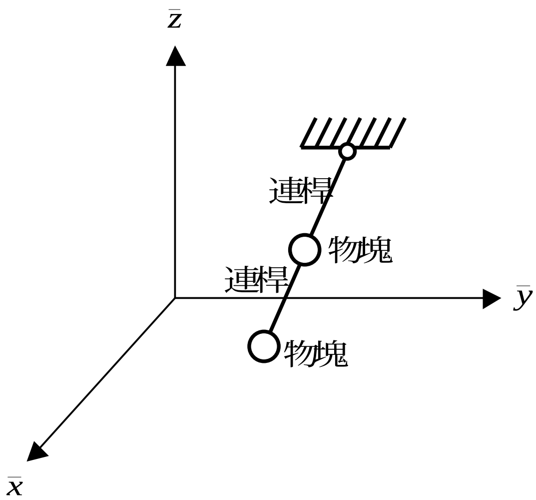


圖1.6　複擺的運動

如果有一結構系統僅需一個獨立座標即可描述其在振動過程中於任何時刻的形勢，則此結構系統稱為單自由度系統。如果需要二個或二個以上的獨立座標才能描述結構系統在振動過程中於任何時刻的形勢，則此結構系統稱為多自由度系統。一個結構系統究竟要以多少個自由度來描述，應以結構振動分析的目標與結構系統的實際狀況來考量。以圖1.7的懸臂柱為例，質量呈連續分佈之柱（參考圖1.7(a)）可用圖1.7(b)之等效系統來取代，其中，連桿為無質量的彈性桿，而柱的質量均勻分佈到五個集結質量。如果圖1.7(b)所示之柱上的五個集結質量僅限於 $\bar{y}\,\bar{z}$ 平面上運動，則每一個集結質量有2個自由度，所以整個結構系統總共有5×2=10個自由度，如果柱於垂直 $\bar{z}$ 方向的運動不重要，則每一集結質量僅有1個自由度，所以整個結構系統總共有5×1=5個自由度。一般而言，在不損失精確度的情形下，結構系統的總自由度越少越好，因為額外的自由度會耗費相當多的分析時間與佔據相當多的電

腦資源，因此，結構系統的自由度應根據結構振動分析的目標、結構系統的實際狀況與分析結果精確度的要求程度來決定。

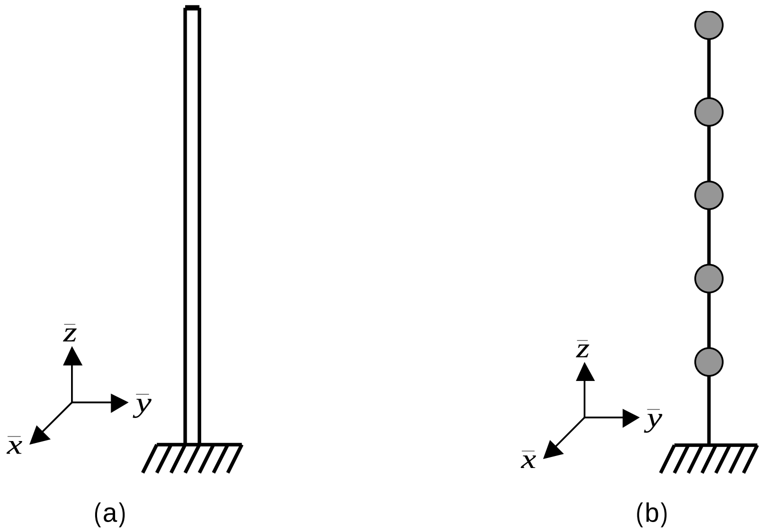


圖1.7　(a)質量呈連續分佈之懸臂柱及其(b)等效系統

1.1.11 廣義座標

所謂「廣義座標」是指滿足限制條件（constrained conditions），並且可以用來完全描述結構系統於任意時間t在空間之瞬時位置，所需要的一組最少獨立物理量，上述物理量可以是長度、角度或其它參數。一般而言，廣義座標的總數目等於結構系統的總自由度數目，換句話說，對一具有m個自由度的結構系統而言，所需要之廣義座標數目為n個，其中，$m = n$。選定結構系統之廣義座標的方式通常有多種，理論上，每一種被選定的廣義座標皆可被用來進行結構振動分析，然而，讀者應該以結構振動分析的目的與結構的基本特性為依據，來選定結構系統之廣義座標，以方便結構系統運動方程式之推導及數值結果分析之進行。以圖1.8所示之系統為例，假設質塊僅在$\bar{x}\,\bar{y}$平面上之斜面滑動，因為$x(t)$、$y(t)$或$d(t)$皆可被用來描述質塊於任意時間t的瞬時位置，所以$x(t)$、$y(t)$或$d(t)$中的任何一個物理量皆可被選定為系統的廣義座標。如果讀者想要推算質塊於任意時間t在$\bar{x}$軸的瞬時位置，則選定$x(t)$為廣義座標是比較好的選擇，因為由系統運動方程式所求出來的解便是所需要的結果，不需要再經過轉換，當然，讀者也可以選用$y(t)$為系統的廣義座標，但是所求出來的解必須再經過轉換，才是質塊於$\bar{x}$軸的瞬時位置。相同的，如果讀者想要推算質塊於任意時間t在$\bar{y}$軸的瞬時位置，則選定$y(t)$為廣義座標是比較好的選擇；如果讀者想要推算質塊於任意時間t在斜面上的瞬時位置，則選定$d(t)$為廣義座標是比較方便的選擇。

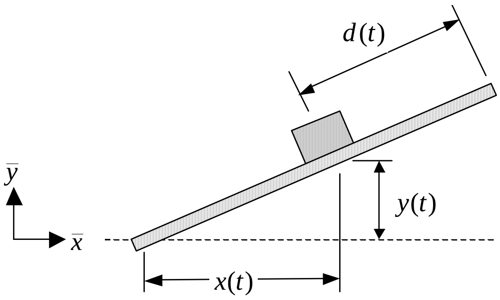


圖1.8 在斜面上滑動之質塊

圖1.8所示之系統可視為一個於 $\bar{x}\,\bar{y}$ 座標系統進行平移運動（translational motion）的系統，因此，所採用的廣義座標皆以平移方向（$\bar{x}$ 平移方向、$\bar{y}$ 平移方向、$\bar{x}\,\bar{y}$ 平移方向）為主。圖1.9所示之系統為一個攜帶有三個集結質量的複擺，由於此系統和 $\bar{x}\,\bar{y}$ 平面上的擺動運動相關，因此，選用三根連桿之角位移為廣義座標，應該比較容易描述三個集結質量於任意時間 t 的瞬時位置。

在圖1.9所示之複擺中，三根連桿皆為無質量且不可壓縮的剛性桿，其長度分別為 ℓ_1、ℓ_2 與 ℓ_3。若此複擺僅在 $\bar{x}\,\bar{y}$ 平面上作擺動，則讀者可選用 θ_1、θ_2 與 θ_3 為此系統的廣義座標，來描述三個集結質量於任意時間 t 的瞬時位置。因為所選用的廣義座標有3個，所以此系統為3自由度系統。當然，讀者也可以選用 $\bar{x}$ 與 $\bar{y}$ 座標來描述集結質量於任意時間 t 的位置，但六個廣義座標，x_1、y_1、x_2、y_2、x_3、y_3，必須滿足下列限制條件：

$$x_1^2 + y_1^2 = \ell_1^2 \tag{1.5}$$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = \ell_2^2 \tag{1.6}$$

$$(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 = \ell_3^2 \tag{1.7}$$

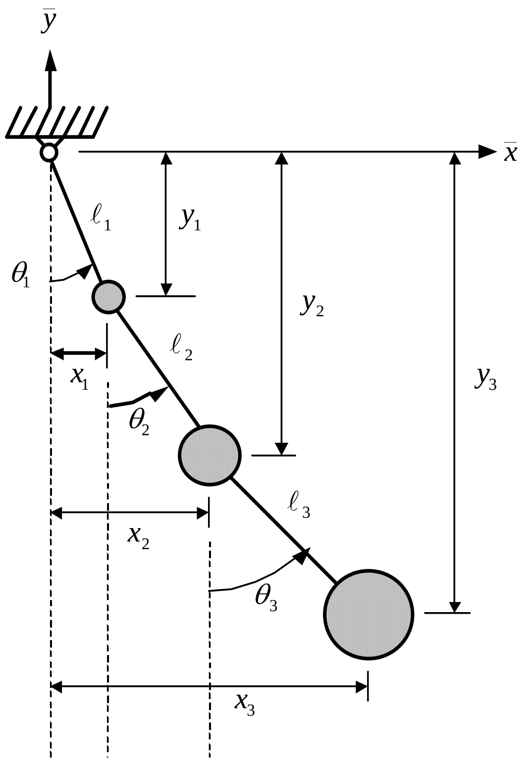


圖1.9 攜帶有三個集結質量的複擺

由方程式(1.5)、(1.6)與(1.7)可以發現，x_1、y_1、x_2、y_2、x_3、y_3 並非獨立的物理量，因此讀者如果選用上述六個物理量為圖1.9所示之系統的廣義座標，則必須利用方程式(1.5)、(1.6)與(1.7)來消去其中3個，此時，系統的廣義座標數目會減為3個。對本例子而

言，雖然（x_1、y_1、x_2、y_2、x_3、y_3）或（θ_1、θ_2、θ_3）皆可作為系統的廣義座標，然而在使用（x_1、y_1、x_2、y_2、x_3、y_3）為廣義座標的過程中，必須經過一道處理程續，因此使用（θ_1、θ_2、θ_3）為此系統的廣義座標應該比較方便。

1.1.12 位移函數（或形狀函數）

在進行結構系統的振動分析過程中，常需選定一些數學函數來描述整個結構系統的近似位移（或速度、加速度）形勢，這些函數便是位移函數（或稱為形狀函數）。一般而言，只要能滿足下列三項要求的數學函數便可當作此結構系統的位移函數：(1) 位移函數必須滿足結構系統的所有幾何邊界條件，且必須具有連續性，換句話說，以位移函數所畫出來之整個結構系統的近似位移（或速度、加速度）形勢不可有中斷現象。(2) 如果連體系統的實際變位可由一系列位移函數相疊加而得，那麼這一系列位移函數中的每一個函數都必須相互線性獨立。(3) 位移函數的最少階數應滿足求算該結構系統應變能的數學式。

以圖1.10所示的兩端鉸接樑（hinged-hinged beam）為例，假設此兩端鉸接樑僅在 $\bar{x}\,\bar{y}$ 平面進行垂直（$\bar{y}$）方向的振動，由於數學函數 $\sin\frac{\pi x}{L}$、$\sin\frac{2\pi x}{L}$、$\sin\frac{3\pi x}{L}$、…、$\sin\frac{n\pi x}{L}$ 等，都可以滿足兩端鉸接樑的幾何邊界條件（兩鉸接端的垂直位移為零），所以這些數學函數都可以被選定為兩端鉸接樑的位移函數。

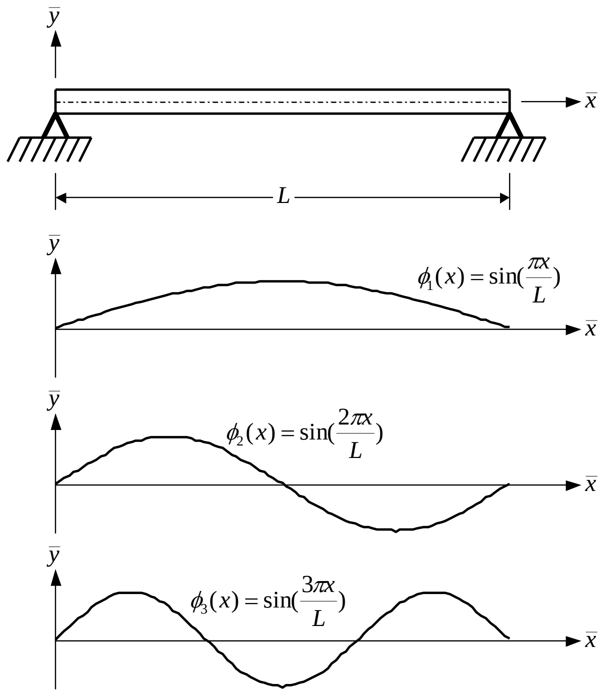


圖1.10　兩端鉸接樑（hinged-hinged beam）及位移函數

圖1.11所示為懸臂樑（cantilever beam）及相關的位移函數，假設此懸臂樑僅在 $\bar{x}\ \bar{y}$ 平面進行垂直（$\bar{y}$）方向的振動，由於數學函數 $1-\cos\frac{\pi x}{L}$、$1-\cos\frac{3\pi x}{L}$、$1-\cos\frac{5\pi x}{L}$、$\cdots$、$1-\cos\frac{(2n-1)\pi x}{L}$ 等，都可以滿足懸臂樑的幾何邊界條件（固定端的垂直位移與角位移皆為零），所以這些數學函數應該都可以被選定為懸臂樑的位移函數。

前面所建議之數學函數雖然滿足結構系統的幾何邊界條件，但未必滿足結構系統的自然邊界條件（與力相關的邊界條件，例如：彎矩或剪力為零），所以在選擇結構系統之位移函數時，應該作多方的考量，以提高結構振動分析結果的可靠性。

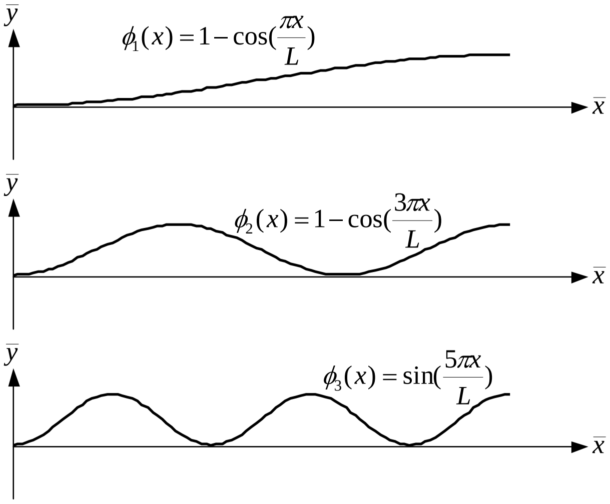


圖1.11　懸臂樑（cantilever beam）及位移函數

1.2　簡諧運動

如圖1.12所示，如果對彈簧下端所懸吊之質塊施予初始位移（也就是說，由質塊的靜平衡位置向下（或向上）移動一微小距離，然後釋放之），則該質塊的上下往復運動即為一種簡諧運動。若質塊上安裝有一個光束，則在以等速向左移動的感光紙上，所描繪而得的曲線方程式為

$$y = A\sin\ 2\pi\frac{t}{\tau} \tag{1.8}$$

其中，A為質塊上下運動的振幅（amplitude），而τ為質塊簡諧運動的週期。

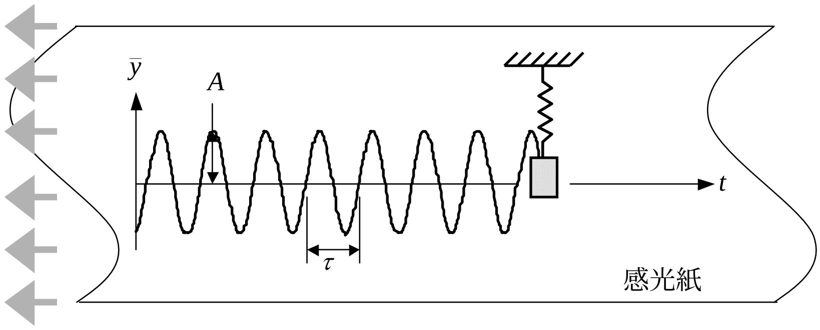


圖1.12　利用感光紙來記錄一單自由度彈簧-質量系統於垂直（$\bar{y}$）方向的運動軌跡

一般而言，簡諧運動可由在圓周上等速運動的質點 B 於 $\bar{y}$（或 $\bar{x}$）軸上的投影來表示（參考圖1.13）。以 $\bar{y}$ 軸上的投影為例，如果半徑 OB（長度等於振幅 A）以等角速度 ω 於逆時針方向轉動，則質點 B 於任意時刻 t 在 $\bar{y}$ 軸上的投影位置為

$$y = A\sin\ \omega t \tag{1.9}$$

其中，ω 為簡諧運動的頻率（單位為rad/sec），由圖1.13可以發現，簡諧運動每隔 2π rad即重複一次，所以

$$\omega = 2\pi f \tag{1.10}$$

將方程式(1.9)對時間 t 微分一次及二次，可得簡諧運動的速度及加速度：

$$\dot{y} = \omega A\cos\ \omega t = \omega A\sin\ (\omega t + \frac{\pi}{2}) \tag{1.11}$$

$$\ddot{y} = -\omega^2 A\sin\ \omega t = \omega^2 A\sin\ (\omega t + \pi) \tag{1.12}$$

由方程式(1.9)、(1.11)與(1.12)可以發現，簡諧運動之速度 $\dot{y}$ 與加速度 $\ddot{y}$ 的相位角（phase angle）分別比簡諧運動之位移 y 的相位角超前 $\pi/2$ 及 π 的角度，換句話說，簡諧運動的速度 $\dot{y}$ 與加速度 $\ddot{y}$ 和位移 y 之間的相位角分別為 $\theta = \pi/2$ 及 $\theta = \pi$。為了讓讀者更了解上述文字的意義，本節將上述之 y、$\dot{y}$ 與 $\ddot{y}$ 的時間歷程圖（time history）畫在圖1.14。由方程式(1.9) 與(1.12)可以發現

$$\ddot{y} = -\omega^2 y \tag{1.13}$$

將方程式(1.13)整理後，可得

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0 \tag{1.14}$$

由方程式(1.13)與(1.14)可以發現，簡諧運動的加速度 $\ddot{y}$ 恆與位移 y 成正比，而且方向相反，此外，加速度 $\ddot{y}$ 與位移 y 的比例常數為 ω^2。換句話說，任何結構系統的運動方程式只要能寫成方程式(1.14)的型式(加速度項 $\ddot{y}$ 的係數必須為1)，則位移項 y 之係數的平方根，即為該結構系統的自然頻率 ω。

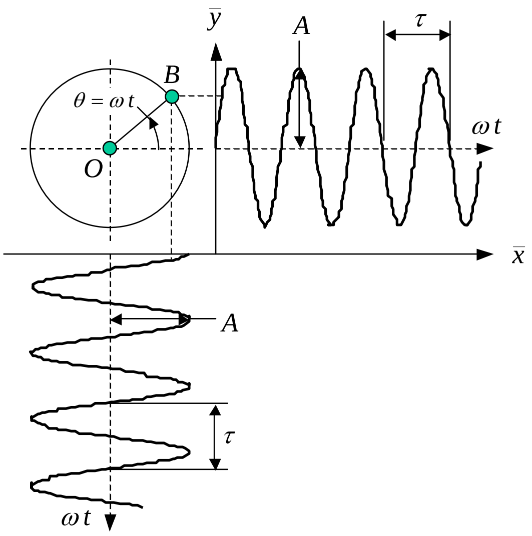


圖1.13　簡諧運動可由在圓周上等速運動的質點 B 於 $\bar{y}$（或 $\bar{x}$）軸上的投影表示

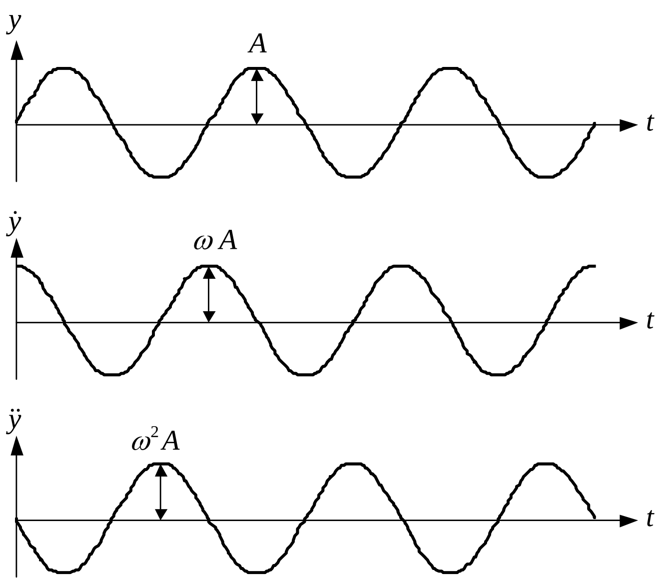


圖1.14　簡諧運動之位移（y）、速度（$\dot{y}$）與加速度（$\ddot{y}$）對時間 t 的歷程圖

1.3 振動分析的流程

一般而言, 在進行結構振動分析時, 其基本流程可歸納為下列四個階段:
（1）建立結構系統的數學模型。
（2）推導結構系統的運動方程式。
（3）求解結構系統的運動方程式。
（4）運動方程式的數值結果分析。

本節將對上述四個流程作一概略性的介紹。

1.3.1 建立結構系統的數學模型

建立結構系統的數學模型是進行結構振動分析的第一個步驟, 也是最基本與最重要的步驟之一，因為結構系統的數學模型如果有錯誤，則後續之結構系統運動方程式的推導、運動方程式的求解與數值結果的分析可能都會含有錯誤。一般而言，實際的結構系統通常是複雜且難以分析的，為了克服這個困難，我們必須對結構進行合理的簡化與假設，然後用一個能描述結構系統之實際動態特性（包括：位移、速度、加速度、...等）的數學模型來取代原本複雜的結構系統，以方便系統運動方程式的推導。

在結構振動分析的領域中, 結構系統的數學模型一般可分為兩大類:（1）離散系統（discrete system）與（2）連體系統（continuous system）。其中，離散系統的自由度總數為有限個，而連體系統的自由度總數為無限多個，很明顯的，如果讀者希望結構系統的自由度總數少一些，那麼採用離散系統是比較好的選擇。建立結構系統之離散化數學模型的方法有很多種，比較常用的三種為:（1）集結質量法（lumped mass method),（2）廣義位移法（generalized displacement method)，（3）有限元素法（finite element method)。

所謂「集結質量法」就是將整個結構系統的所有質量用一系列的集結質量來取代，然後用這些集結質量的位移、速度與加速度來描述整個結構系統的動態反應。以圖1.7所示之懸臂柱為例，圖1.7 (a)之懸臂柱為連體系統，所以有無限多個自由度，但是讀者如果用圖1.7 (b)之模型來取代圖1.7 (a)之懸臂柱，則上述懸臂柱便可化簡為一個有限個自由度的結構系統，而圖1.7 (b)中之每一個集結質量的位移、速度與加速度便可用來描述圖1.7 (a)之懸臂柱的動態反應。

所謂「廣義位移法」就是用一系列位移曲線（或曲面）之總和來描述結構系統的振動形勢，其中位移曲線（或曲面）為結構系統的模態位移座標，位移曲線（或曲面）之個數為結構系統之數學模型所使用的自由度數目。

所謂「有限元素法」就是用一些基本的小元素（或單元）來組成完整的結構系統，其中，上述小元素在有限個節點（或連接點）處相互連接，且節點的總座標數就是結構系統的自由度總數。在結構系統的有限元素模型（就是結構系統的數學模型）建立完成後，我們便可以利用所有節點處之位移、速度與加速度來描述整個結構系統的動態反應。本書於後續章節皆有對上述三種方法作概略性的介紹，請讀者自行參考相關章節，以便更進一步了解上述三種方法的內容。

1.3.2 推導結構系統的運動方程式

結構系統的數學模型建立完成後，接下來的步驟便是推導結構系統的運動方程式。在結構振動的領域中，推導結構系統運動方程式的方法有很多種，本書於第二章將介紹下列幾種：(1) 牛頓第二運動定律（Newton’s second law）（或稱為達朗貝原理（d’Alembert’s principle）)，（2）能量法（energy method)，（3）虛位移法（virtual displacement method)，（4）哈密爾頓原理（Hamilton’s principle)，（5）拉格朗日方程式（Lagrange’s equation)。一般而言，任何一種方法都可以用來推導結構系統的運動方程式，而且所推導出來之結構系統的運動方程式也應該要完全一樣。然而，就作者的經驗來看，如果所要進行振動分析之結構系統的複雜度較高，則採用能量法或拉格朗日方程式會比牛頓第二運動定律方便許多。

1.3.3 求解結構系統的運動方程式

圖1.15所示為進行結構振動分析的基本流程，很明顯的，所要求解的結構系統運動方程式一般可分成兩大類：(1) 連體系統的偏微分方程式（partial differential equation)，（2）離散系統的常微分方程式（ordinary differential equation)。在結構振動的領域中，常用古典法（classical methods)（或解析法（analytical method)）來求解連體系統的偏微分方程式，此時所得到的解為閉式解（closed form solution）或正解（exact solution)。當然讀者也可以用數值法（numerical methods）來求解連體系統的偏微分方程式，此時所求到的解雖然是近似解（approximate solution)，不過由連體系統所求到的解亦應屬於閉式解或正解的一種。對離散系統的常微分方程式而言，我們已無法用古典法來求解（因為常微分方程式的數目可能很多)，這時僅能用數值法來求解，由離散系統所求到的解一律屬於近似解。

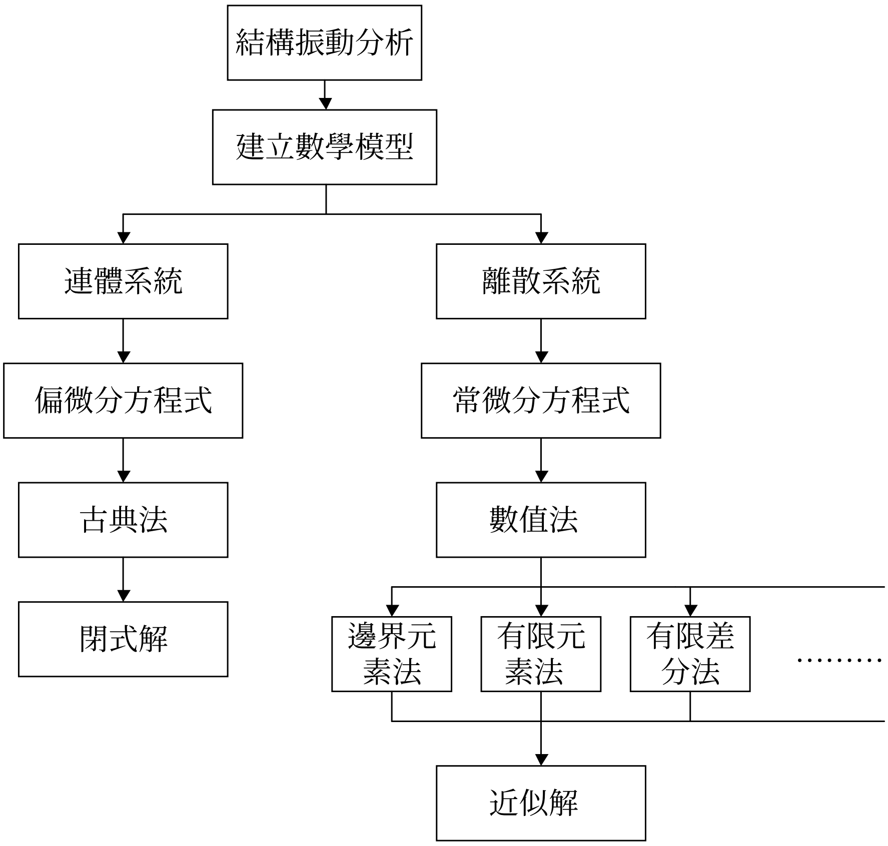


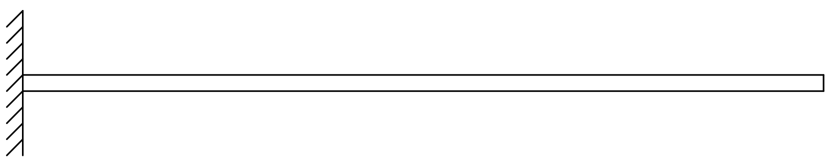
圖1.15　進行結構振動分析的基本流程

1.3.4 運動方程式的數值結果分析

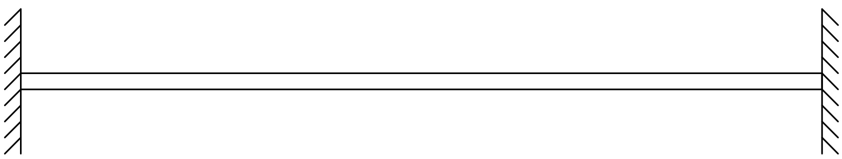
完成結構系統之運動方程式的求解步驟後，接下來的步驟便是分析所得到的結果。在這部份，讀者應該針對進行結構振動分析的目的來分析所得到的結果，然後探討結構系統的相關物理參數與現象。一般而言，求解運動方程式的結果為結構系統的位移、速度與加速度，因此，所謂「結構振動分析」就是在分析結構系統的位移、速度與加速度動態反應。

1.4 練習題

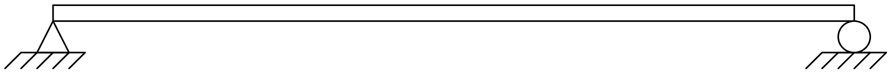
1. 什麼是「自由振動」？
2. 什麼是「自然頻率」？
3. 什麼是「週期性運動」？
4. 什麼是「振態」？
5. 什麼是「動態負載」？
6. 什麼是「強迫振動」？
7. 什麼是「動態反應」？
8. 什麼是「共振」？
9. 什麼是「阻尼」？
10. 什麼是「自由度」？
11. 什麼是「廣義座標」？
12. 什麼是「位移函數」？
13. 什麼是「簡諧運動」？
14. 振動分析的流程為何？
15. 什麼是「連體系統」？
16. 什麼是「離散系統」？
17. 什麼是「集結質量法」？
18. 什麼是「廣義位移法」？
19. 什麼是「有限元素法」？
20. 如何建立下圖所示之懸臂樑（cantilever beam）的數學模型？



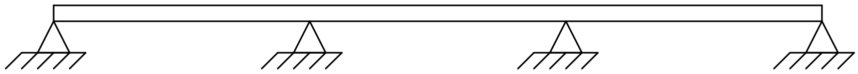
21. 如何建立下圖所示之兩端固定樑（clamped-clamped beam）的數學模型？



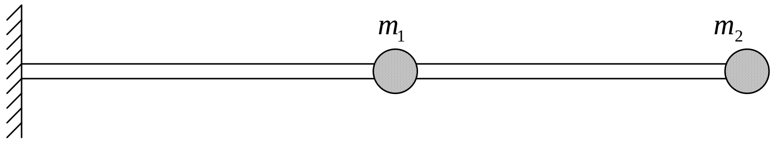
22.如何建立下圖所示之簡支樑（simply supported beam）的數學模型？



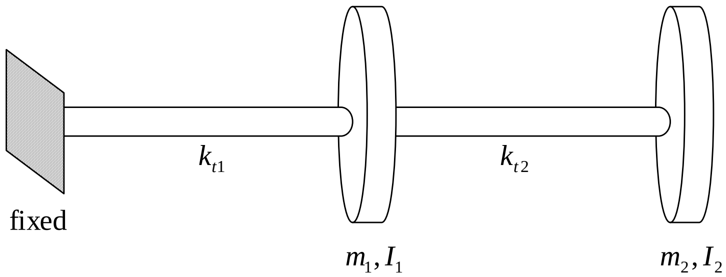
23.如何建立下圖所示之多跨距樑（multi-span beam）的數學模型？



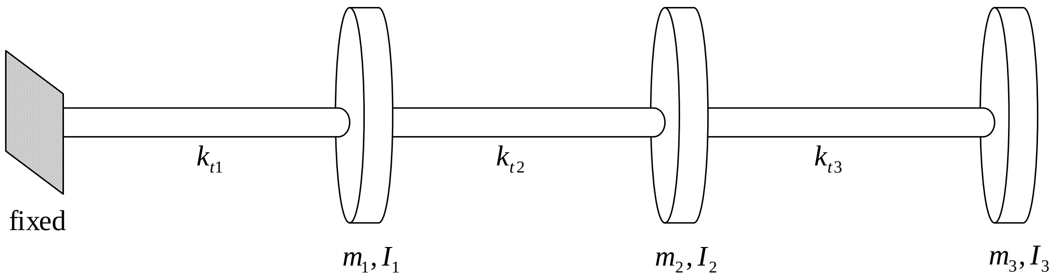
24.如何建立下圖所示之結構系統的數學模型？



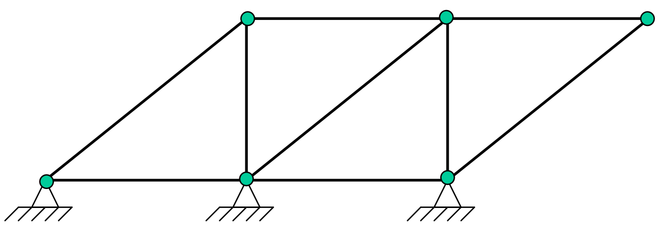
25.如何建立下圖所示之軸系的數學模型？



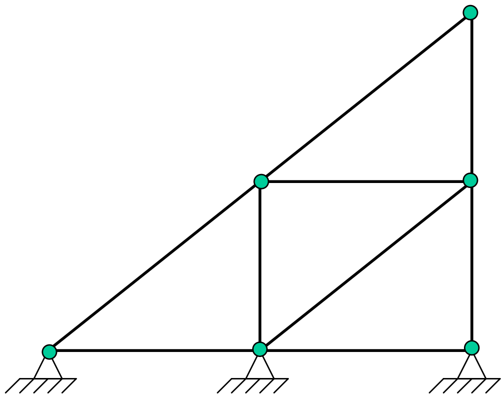
26.如何建立下圖所示之軸系的數學模型？



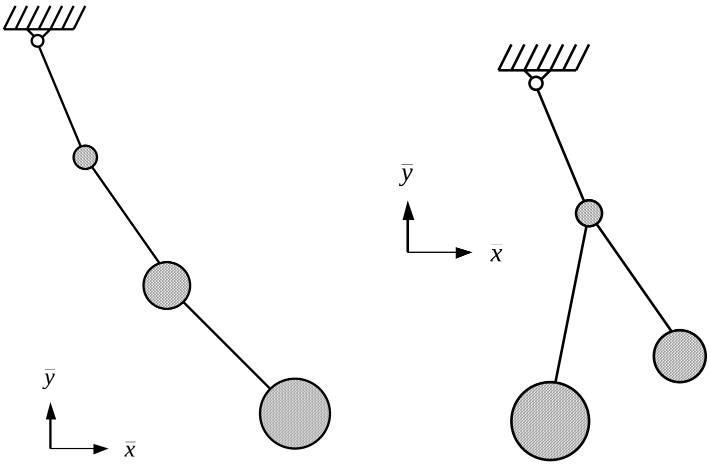
27.如何建立下圖所示之二維桁架的數學模型？



28. 如何建立下圖所示之二維桁架的數學模型？



29. 下圖所示的兩個複擺系統各有幾個自由度？



30. 下圖所示的三個彈簧-質量系統各有幾個自由度？