CHAPTER 01

自動控制簡介

AUTOMATIC CONTROL SYSTEMS

1-1 前 言

綜觀人類各個階段的發展歷程，在進入 20 世紀以來，科技能夠獲得突飛猛進的發展，主要就是基於「自動控制」理論架構基礎下所引導，獲得各項重要的進展。

在航太和國防工業中，自動控制在太空飛船系統、飛彈導引系統和飛機的自動駕駛系統中發揮著特別重要的功能。在現代製造業和工業生產過程中自動控制同樣扮演著無可替代的作用，例如數控工具機的控制，產業機械系統之流量、壓力、溫度、濕度…等的控制等均離不開自動控制的範疇。此外，在機器人控制、城市交通控制、網絡壅塞控制…等問題中，自動控制也都發揮著重要的作用。

自動控制的基本原理為，在「人」不直接參與系統運作的情況下，能夠使某些受控變量（例如飛機的飛行速度和仰角、工業加熱爐的爐溫等…），能夠按照指定的規律變化。自動控制提高了生產效率和產品質量，使人類脫離繁重的體力勞動和大量重複性動作。對於各類型工程技術人員和科學研究人員來說，具備「自動控制」的知識是非常必要的。

自動控制最早的具體應用成果，就是十八世紀瓦特(Watt)為控制蒸氣機運轉速度所設計的「離心調節器」。當時所設計的自動控制系統很容易產生振盪現象，也就是無法順利控制蒸氣機的運轉速度保持在一個恆定的轉速。後來大約一百年之後，馬克士威爾(Maxwell)對蒸氣機系統的動態特性進行了分析並提出了改進方案。第一次世界大戰爆發後，軍事工業的需要促進了自動控制理論的發展。1922 年米納斯基(Minosky)首先研製出船舶操縱自動控制器，並提出了控制系統的穩定性分析。1932 年奈奎斯特(Nyquist)提出一種利用系統頻率響應圖確定系統穩定性的簡便方法（即奈氏穩定準則）。1934 年赫曾(Hezen)首次提出「伺服」的概念，提出可以精確追蹤隨著時間變化的輸入信號之繼電器伺服機構。到了第二次世界大戰，由於設計和建造飛機自動駕駛儀、火砲定位系統、雷達追蹤系統…等軍用裝備的需要，自動控制理論獲得了突飛猛進的發展。1945 年波德(Bode)發表了用於控制系統的頻域設計方法。1948 年伊凡思(Evans)提出了根軌跡方法。至此，以頻率響應法和根軌跡法為核心的古典控制理論的架構方才建立完畢。然而控制理論前進的動力並未停下來。從 1960 年開始，由於計算機的出現以及工業與軍事技術的需求，以時域方法為主的諸多分析設計方法得到迅速的發展。例如，卡曼(Kalman)濾波理論、最佳化控制理論、自適應控制理論…等都是在 20 世紀 60

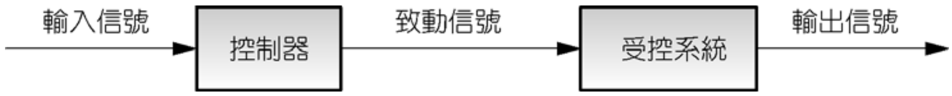
年代至 80 年代這一期間所提出發展的。此一時期，受控制的系統從單輸入－單輸出系統發展到多輸入－多輸出系統，從確定性系統發展到隨機系統。1980 年至今，控制理論的主要成就集中在不確定系統的強韌性控制方面，其中最具代表性就是 H∞控制理論的建立和發展。

1-2 控制系統的分類

控制系統可依訊號是否有回授、系統之性質、訊號之性質、回授訊號之種類等方式做分類。

（一）依系統之訊號是否有回授區分：開迴路控制系統與閉迴路控制系統。

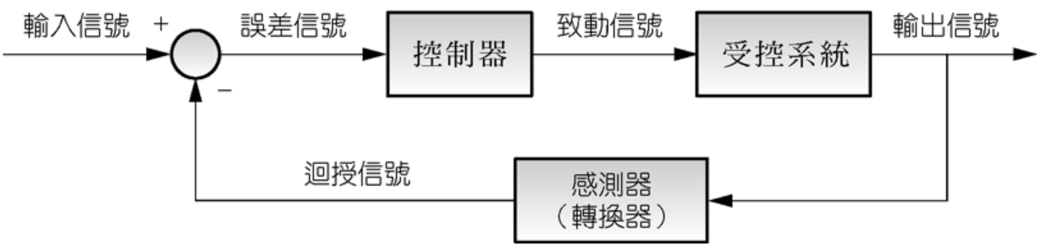
- ◈ 開迴路控制系統：系統的輸出信號對於控制的動作沒有任何影響之控制系統稱之為開迴路控制系統，下圖為典型之開迴路控制系統方塊圖。



※ 開迴路控制系統之**優點**：(1)結構簡單；(2)價格低廉（不需加裝感測元件）；(3)維護容易；(4)不需考慮穩定性問題。

※ 開迴路控制系統之**缺點**：(1)無法控制精確度；(2)無法修正外界干擾所造成之誤差；(3)無法改變系統之穩定度；(4)無法改善系統之暫態響應。

- ◈ 閉迴路控制系統：系統的輸出信號對於控制的動作有影響之控制系統稱之為閉迴路控制系統，下圖為典型之閉迴路控制系統方塊圖



※ 閉迴路控制系統之**優點**：(1)增加系統輸出信號之精確度；(2)可減少外界干擾所造成之誤差；(3)可以改變系統之穩定度；(4)可以改善系統之暫態響應；(5)可降低系統對於內部元件微小變化之靈敏度。

※ 閉迴路控制系統之**缺點**：(1)結構較複雜；(2)價格成本高（需加裝感測元件）；(3)消耗功率較開迴路系統高；(4)回授不當會造成系統不穩定。

重點整理提示：

◎ 開迴路控制系統之優點為何？

◎ 開迴路控制系統之缺點為何？

◎ 閉迴路控制系統之優點為何？

◎ 閉迴路控制系統之缺點為何？

隨堂練習

下列關於負回授控制的敘述，何者係錯誤？ (A)負回授控制可減少外來干擾的影響 (B)負回授控制可增加系統的增益 (C)負回授控制可改變系統的暫態響應 (D)負回授控制會改變系統的穩定度。

答： (B)

（二） 依系統之**性質**區分：

(1) **線性**系統與**非線性**系統。

(2) **時變**系統與**非時變**系統。

(3) **因果**系統與**非因果**系統。

（三）依系統之**訊號之性質**區分：連續性（類比）控制系統與離散性（數位）控制系統

◈ **連續性**（類比）控制系統：控制系統內部所處理的信號均為時間的連續函數，稱為連續性（類比）控制系統。

◈ **離散性**（數位）控制系統：控制系統內部所處理的信號部分為**脈衝序列（數列）**或**數位碼**等，稱為離散性（數位）控制系統。

（四）依系統之**回授訊號之種類**區分：

(1) 伺服(servo)控制系統：系統之輸出信號為機械性之信號，例如，位置（位移）、速度、加速度、力、角位移、角速度、角加速度、力矩…等，稱之為伺服(servo)控制系統。

(2) 程序控制系統：系統之輸出信號為化學性（環境類）之信號，例如，壓力、溫度、流量、溼度、酸鹼值…等，稱之為程序控制系統。

(3) 自動調整系統：系統之輸出信號為電機械性之信號，例如，電壓、電流、電荷、頻率、轉速…等，稱之為自動調整系統。

（五）依系統之**輸出信號與時間之關係**區分：

(1) 定值(regular)控制系統：系統之輸出信號之目標值為固定大小，例如，冷氣機之室溫定溫控制。

(2) 追蹤(tracking)控制系統：系統之輸出信號之目標值為時間的函數，例如，自動焊接系統，機器人臂依循某特定路徑作焊接動作。

1-3 控制系統的分析與設計

1-3-1 控制系統的分析的目的

一般來說，控制系統的分析的目的主要在於評估下列事項：(1)系統穩定度，(2)暫態響應，(3)穩定狀態之性能（穩態響應，即誤差分析），(4)頻率響應，(5)根軌跡分析，(6)狀態空間分析。

(1) 系統穩定度分析

在自動控制系統中，穩定度的定義主要有兩種，即漸近穩定性(asymptotically stability)與有界輸入有界輸出穩定性(bounded input bounded output stability)。判斷系統穩定度的方法主要有路茲(Routh)穩定準則，奈氏(Nyquist)穩定準則及 Lyapunov 穩定定理。

(2) 暫態響應與穩態響應分析

這部份屬於定量的分析，主要是評估系統響應的數值大小，例如上升時間，最大超越量，尖峰時間，安定時間，系統時間常數，穩態誤差。這些數據可用以衡量系統響應的優劣，並可作為自動控制系統的性能規格。

(3) 頻率響應分析

包含有波德圖、極座標圖、尼可士圖(Nichol's chart)，以及頻域規格（增益邊限、相位邊限、尖峰共振、共振頻率、頻寬…等）。

(4) 根軌跡分析

主要討論開迴路轉移函數在比例控制增益值改變時，閉迴路系統的極點在複數平面所對應的變化曲線之特性。此部份的分析有助於理解調節系統比例控制增益大小，對於閉廻路系統的性能規格及穩定度的影響。

(5) 狀態空間分析

此部份除了整合前述各種項目之外，另外還可進一步討論系統狀態的可控制性(controllability)及可觀測性(observability)，這些分析可用以評估系統狀態估測器與狀態迴授控制器是否能夠達成性能規格要求。

1-3-2 控制系統的分析研究與設計的程序

一般來說，控制系統的分析研究與設計的程序如下：(1)建立模型，(2)系統數學描述，(3)控制系統的分析，(4)控制系統的設計，(5)控制系統的摸擬驗證。

CHAPTER 02

系統數學模型—轉移函數

AUTOMATIC CONTROL SYSTEMS

自動控制系統不單純只是各種元件的連接，從系統理論的角度來看，它是信號傳遞和轉換的過程。系統的數學模型就是用以描述系統中各種信號（或變量）之傳遞和轉換的關係。

系統數學模型的建立為吾人研究系統特性帶來了極大的便利。它可使吾人得以暫時離開系統的物理特性，在一般意義下研究控制系統的普遍規律。當然把具有普遍性的規則運用到分析和設計具體系統時，仍要充分注意到系統的物理特性。

數學模型通常是描述系統各變量間之關係的一個或一組方程式。由於自動控制系統是動態系統（即以時間為變量的系統），描述控制系統的基本工具是微分方程式（連續系統）或是差分方程式（離散系統）。這種模型一般稱為時域模型。對於線性非轉變系統，利用拉普拉斯變換，可以將時域模型轉換為頻域模型，也就是系統轉移函數。為能說明系統轉移函數的特性，以下介紹信號特性與系統性質。

2-1 信　號

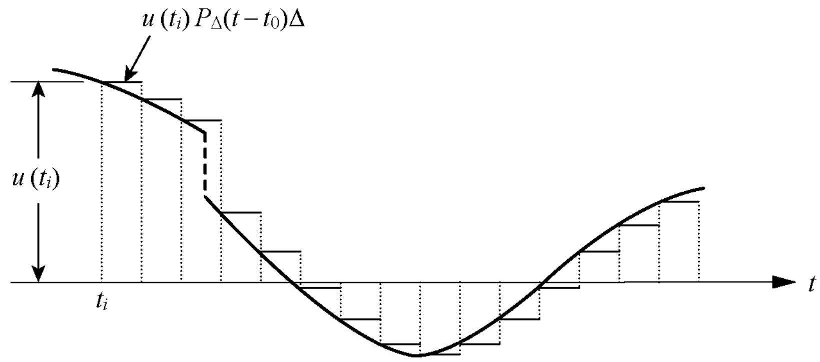
有關信號特性說明的課題，請讀者參閱本書光碟。

2-2 系統性質

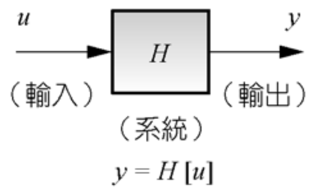
有關系統性質的課題，請讀者參閱書本書光碟。

2-3 系統輸入與輸出的數學描述

任何函數可以用一系列脈波函數的總和來近似表示：$u(t)=\sum_{i=0}^{n}u(t_i)\cdot P_\Delta(t-t_i)\cdot\Delta$，如下圖所示。其中 $P_\Delta(t-t_i)$ 為單位脈波函數，Δ 為脈波寬度。



考慮右圖所示之系統 $H[\bullet]$，其中 u 為輸入，y 為輸出。現在依前述所提及系統的四種性質：**鬆弛性、線性、非時變系統、因果性**，進一步討論系統輸入與輸出之關係。



(1) 假設系統為鬆弛系統（在 $t=-\infty$ 時），則輸出可由輸入唯一決定：$y = H\left[u(t)\right]$。

(2) 若系統為<u>線性系統</u>，則輸出可進一步表示如下：

$$y(t) = H\left[u(t)\right] = H\left[\sum_{i=0}^{n} u(t_i)\cdot P_\Delta(t-t_i)\cdot\Delta\right] = \sum_{i=0}^{n} H\left[P_\Delta(t-t_i)\right]\cdot u(t_i)\cdot\Delta$$

將時間間隔變小：$\Delta\to 0, n\to\infty$，

$$\begin{aligned} y(t) = H\left[u(t)\right] &= \lim_{\substack{\Delta\to 0\\ n\to\infty}} \sum_{i=0}^{n} H\left[P_\Delta(t-t_i)\right]\cdot u(t_i)\cdot\Delta \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} H\left[\lim_{\Delta\to 0} P_\Delta(t-t_i)\right]\cdot u(t_i)\cdot\Delta \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H\left[\delta(t-\tau)\right]\cdot u(\tau)\,d\tau$$

定義系統之單位脈衝響應(unit impulse response)函數如下：

$$H\left[\delta(t-\tau)\right] = g(t,\tau)$$

則系統輸入與輸出之關係可進一步寫成：

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t,\tau)\cdot u(\tau)\,d\tau$$

觀念解析

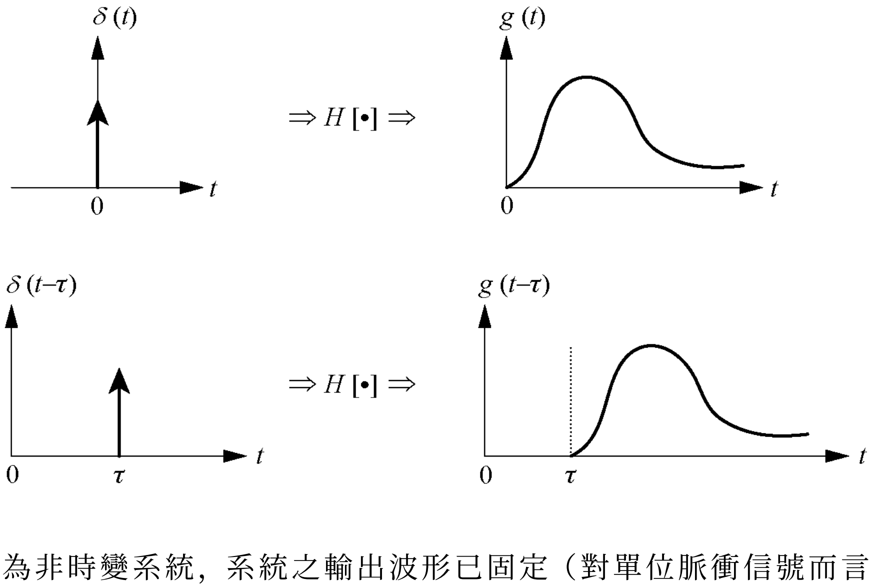
$H[\delta(t-\tau)] = g(t,\tau)$ 中，第一個時間變數 t 為吾人觀察輸出 $y(t)$ 的時間；第二個時間變數 τ 為系統輸入單位脈衝信號 $\delta(t-\tau)$ 的時間。

此處吾人尚未進一步定義系統的非時變性，所以將系統之單位脈衝響應 $H[\delta(t-\tau)] = g(t,\tau)$ 之兩個時間變數分開，此表示對同一個輸入信號，但是在不同的輸入時間，吾人將得到不同的輸出結果。

(3) 若系統為**因果系統**，則系統在加入任何輸入前，輸出為零（有「因」才有「果」）。也就是 $H[\delta(t-\tau)] = g(t,\tau) = 0, t < \tau$，系統輸入與輸出之關係可進一步寫成：

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} g(t,\tau)\cdot u(\tau)d\tau$$

(4) 若系統為**非時變系統**，代表對同一個輸入信號，雖然在不同的時間輸入單位脈衝信號 $\delta(t-\tau)$，吾人亦將得到相同的輸出波形，如下圖所示。



系統為非時變系統，系統之輸出波形已固定（對單位脈衝信號而言），差異在於觀察輸出的時間 t 與系統輸入單位脈衝信號的時間 τ 這兩個變數的相對關係，也就是系統之輸出波形只與 $(t-\tau)$ 有關，因此系統之單位脈衝響應

可進一步再寫成 $H\left[\delta(t-\tau)\right]=g(t,\tau)=g(t-\tau,0)=g(t-\tau)$。所以系統輸入與輸出之關係就可以再變成：

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t} g(t-\tau)\cdot u(\tau)d\tau$$

觀念解析

有關上述系統於各種性質之定義下，系統輸入與輸出之關係式，進一步整理如下：

(1) 系統在 $t=-\infty$ 時鬆弛且系統為線性系統：

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} g(t,\tau)\cdot u(\tau)d\tau$$

(2) 系統在 $t=-\infty$ 時鬆弛且系統為線性、因果系統：

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t} g(t,\tau)\cdot u(\tau)d\tau$$

(3) 系統在 $t=-\infty$ 時鬆弛且系統為線性、非時變系統：

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)\cdot u(\tau)d\tau$$

(4) 系統在 $t=-\infty$ 時鬆弛且系統為線性、因果、非時變系統：

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t} g(t-\tau)\cdot u(\tau)d\tau$$

(5) 系統在 $t=0$ 時鬆弛且系統為線性系統：

$$y(t)=\int_{0}^{\infty} g(t,\tau)\cdot u(\tau)d\tau$$

(6) 系統在 $t=0$ 時鬆弛且系統為線性、因果系統：

$$y(t)=\int_{0}^{t} g(t,\tau)\cdot u(\tau)d\tau$$

(7) 系統在 $t=0$ 時鬆弛且系統為線性、非時變系統：

$$y(t)=\int_{0}^{\infty} g(t-\tau)\cdot u(\tau)d\tau$$

(8) 系統在 $t=0$ 時鬆弛且系統為線性、因果、非時變系統：

$$y(t)=\int_{0}^{t} g(t-\tau)\cdot u(\tau)d\tau$$

上式即為摺合積分(convolution)的定義式。

當系統具備(1)在 $t=0$ 時鬆弛，(2)線性，(3)因果，(4)非時變的性質時，吾人可利用拉式轉換，將系統表示為轉移函數：

$$\mathcal{L}\{y(t)\}=\mathcal{L}\left\{\int_0^t g(t-\tau)\cdot u(\tau)d\tau\right\}\Rightarrow Y(s)=G(s)U(s)\Rightarrow G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}$$

隨堂練習

設一電路脈衝響應為 $h(t)$，其輸出 $y(t)$ 與輸入 $v(t)$ 之關係為 $y(t)=\int_0^t h(t-\tau)\cdot v(\tau)d\tau$，試問下列何者**非**此電路所具有之特性？ (A)此電路為一線性非時變系統 (B)此電路存在有拉氏轉換的轉移函數 (C)此電路不具因果性 (D)此電路為一鬆弛系統。

答： (C)

輸出 $y(t)$ 與輸入 $v(t)$ 之關係為 $y(t)=\int_0^t h(t-\tau)\cdot v(\tau)d\tau$ 及代表系統具有下列性質：(1)在 $t=0$ 時鬆弛，(2)線性，(3)因果，(4)非時變

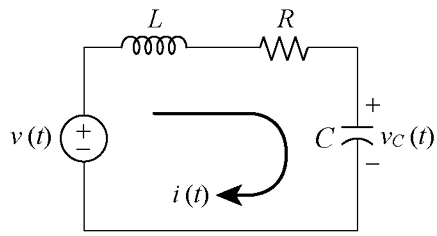
若系統滿足鬆弛性、線性、非時變性、因果性，則系統的輸入與輸出的關係可以利用轉移函數來表示。然而一個系統的數學描述方法，基於不同的分析技巧，可以利用其他方式來表示，因此以下說明線性非時變系統的數學描述方法。除了轉移函數之外，線性非時變系統亦可利用方塊圖，信號流程圖及狀態方程式來表示。方塊圖與信號流程圖為圖示的方式，用以表示出整個系統的因果關係，而狀態方程式為一種時域表示法，可用以分析系統的狀態可控制性與狀態可觀測性，此部份於第 3 章說明。

2-4 線性非時變系統之數學描述法分類

線性非時變系統之數學描述方法，主要有以下三種：(1)微分方程式(differential equation)，(2)轉移函數(transfer function)，(3)狀態方程式(state space equation)。下面以例題說明如何利用上述方法來描述一個簡單的電路系統。

範例 2-1

如右圖所示之 RLC 串聯電路，試分別利用下列系統之數學描述方法：(1)微分方程式，(2)轉移函數，(3)狀態方程式，寫出系統之數學描述，其中電源電壓 $v(t)$ 為輸入信號，電容電壓 $v_C(t)$ 為輸出信號。



解 (1) 利用克希荷夫電壓定律：

$$v(t)=v_L(t)+v_R(t)+v_C(t) \Rightarrow v(t)=L\frac{di(t)}{dt}+Ri(t)+\frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau$$

再利用電荷 q 與電流 i 間之關係式：$i(t)=\dfrac{dq(t)}{dt}$，代入上式得

$$L\frac{d^2q(t)}{dt^2}+R\frac{dq(t)}{dt}+\frac{1}{C}q(t)=v(t)$$

再利用電容電壓 v_C 與電荷 q 間之關係式：$v_C(t)=\dfrac{q(t)}{C}$，代入上式得

$LC\dfrac{d^2v_C(t)}{dt^2}+RC\dfrac{dv_C(t)}{dt}+v_C(t)=v(t)$，上式即為 RLC 串聯電路之微分方程式描述。

(2) 利用阻抗的觀念，電感 L 之阻抗為 Ls；電阻 R 之阻抗為 R；電容 C 之阻抗為 $\dfrac{1}{Cs}$。再利用分壓定律即可得到電容電壓 $V_C(t)$ 之拉式轉換 $V_C(s)$ 與電源電壓 $v(t)$ 之拉式轉換 $V(s)$ 間之關係：

$\dfrac{V_C(s)}{V(s)}=\dfrac{1/Cs}{Ls+R+1/Cs}=\dfrac{1}{LCs^2+RCs+1}$，上式即為 RLC 串聯電路之轉移函數描述。

(3) 選定串聯電路之電流 $i(t)$ 與電容電壓 $v_C(t)$ 為狀態變數，利用電感 L 之電感電壓 $v_L(t)$ 與電流 $i(t)$ 之關係式：$v_L(t)=L\dfrac{di(t)}{dt}$，及電容電壓 $v_C(t)$ 與電流 $i(t)$ 之關係式：$i(t)=C\dfrac{dv_C(t)}{dt}$，吾人可以列出以下等式：

$$v(t)=v_L(t)+v_R(t)+v_C(t)\Rightarrow L\frac{di(t)}{dt}+Ri(t)+v_C(t)=v(t)$$

$$\Rightarrow\frac{di(t)}{dt}=\frac{1}{L}\left[v(t)-Ri(t)-v_C(t)\right]$$

另外輸出為電容電壓 $v_C(t)$。以矩陣方式重新整理可得以下表示法：

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}i(t)\\v_C(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{R}{L} & -\frac{1}{L}\\ \frac{1}{C} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i(t)\\v_C(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{L}\\0\end{bmatrix}v(t)\ ;\ y(t)=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i(t)\\v_C(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\end{bmatrix}v(t)$$

，上式即為 RLC 串聯電路之狀態方程式描述。

2-5 轉移函數

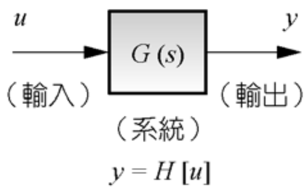
2-5-1 轉移函數的定義

線性非時變系統之轉移函數(transfer function)定義為：**在初始條件均為零之情況下，系統輸出信號之拉式轉換與系統輸入信號之拉式轉換的比值。**

如下圖所示，系統輸入信號為 $u(t)$，系統輸出信號為 $y(t)$，則此系統之轉移函數為：

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{\mathcal{L}\{y(t)\}}{\mathcal{L}\{u(t)\}}$$

其中 $U(s)$ 與 $Y(s)$ 分別為系統輸入信號 $u(t)$ 與系統輸出信號 $y(t)$ 之拉式轉換。



2-5-2 轉移函數與線性非時變常微分方程式之間的轉換

（一） 微分方程式轉換為轉移函數：

一個n階線性非時變常微分方程式如下，其中$n \ge m$。

$$
\begin{aligned}
&y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+a_{n-2}y^{(n-2)}(t)+\cdots+a_1y'(t)+a_0y(t)\\
&=b_mu^{(m)}(t)+b_{m-1}u^{(m-1)}(t)+\cdots+b_1u'(t)+b_0u(t)
\end{aligned}
$$

將微分方程式轉換為轉移函數的步驟如下：

(1) 令微分方程式之所有初始條件均為零，並對微分方程式等號兩側取拉式轉換，則吾人可得以下關係式：

$$
\begin{aligned}
&\left(s^n+a_{n-1}s^{n-1}+a_{n-2}s^{n-2}+\cdots+a_1s+a_0\right)\cdot Y(s)\\
&=\left(b_ms^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1s+b_0\right)\cdot U(s)
\end{aligned}
$$

(2) 進一步作移項得出$Y(s)$與$U(s)$間的比值，也就是系統之轉移函數：

$$
G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_ms^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0},\ n\ge m
$$

另外，若轉移函數$G(s)$可以因式分解如下：

$$
G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{K\cdot(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)}=K\frac{N(s)}{D(s)},\ n\ge m
$$

其中分子$N(s)=0$之根：$s=-z_1,-z_2,\cdots,-z_m$稱為系統的零點(zeros)；分母$D(s)=0$之根：$s=-p_1,-p_2,\cdots,-p_n$稱為系統的極點(poles)；K為系統的增益常數；另外分母$D(s)=0$又稱為系統的特性方程式(characteristic equation)。

（二） <u>轉移函數轉換成微分方程式</u>：

若一個n階線性非時變系統之轉移函數關係式如下：

$$
G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_ms^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0},\ n\ge m
$$

則由轉移函數轉換成微分方程式的步驟如下：

(1) 對系統之轉移函數作移項：

$$\left(s^n+a_{n-1}s^{n-1}+a_{n-2}s^{n-2}+\cdots+a_1s+a_0\right)\cdot Y(s)$$
$$=\left(b_ms^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1s+b_0\right)\cdot U(s)$$

(2) 將上式乘開後，以 $\dfrac{d^k}{dt^k}$、 $y(t)$、 $u(t)$ 分別取代 s^k、 $Y(s)$、 $U(s)$ 後，即可得到微分方程式：

$$y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+a_{n-2}y^{(n-2)}(t)+\cdots+a_1y'(t)+a_0y(t)$$
$$=b_mu^{(m)}(t)+b_{m-1}u^{(m-1)}(t)+\cdots+b_1u'(t)+b_0u(t)$$

2-5-3 轉移函數的特性

(1) 僅線性非時變系統才有轉移函數的定義。
(2) 系統所有的初始條件均設定為零。
(3) 轉移函數與輸入信號種類無關。
(4) 轉移函數僅描述系統輸入與輸出間的關係，無法提供系統內部的訊息。

隨堂練習

關於轉移函數之特性，下列何者不正確？ (A)轉移函數適用於線性非時變系統 (B)轉移函數之計算法為輸出信號之拉氏轉換與輸入信號之拉氏轉換之比 (C)在求轉移函數時令初值為零 (D)轉移函數與輸入激勵信號有關。

答： (D)

隨堂練習

已知一線性非時變系統的單位脈衝響應為 $g(t)$，若系統輸入為 $u(t)$，則系統輸出 $y(t)$ 為何？

(A) $y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}g(t-\tau)\cdot u(\tau)d\tau$　(B) $y(t)=\int_{-\infty}^{t}g(t-\tau)\cdot u(\tau)d\tau$

(C) $y(t)=\int_{0}^{\infty}g(t-\tau)\cdot u(\tau)d\tau$　(D) $y(t)=\int_{0}^{t}g(t-\tau)\cdot u(\tau)d\tau$。

答： (D)

範例 2-2

一系統具有極點在 $s=-1\pm j3$，零點在 $s=-2$，若增益常數為 2 時，試求系統之轉移函數？

解 $G(s)=\dfrac{2(s+2)}{(s+1+j3)(s+1-j3)}=\dfrac{2s+4}{s^2+2s+10}$

隨堂練習

一系統具有極點在 $s=-3,-1\pm j3$，零點在 $s=-1\pm j2$，若增益常數為 3 時，試求系統之轉移函數？

答：$G(s)=\dfrac{3(s^2+2s+5)}{(s+3)(s^2+2s+10)}$

範例 2-3

一系統轉移函數 $G(s)$ 具有三個極點：$s=-1,-2,-2$，一個零點：$s=-3$，若直流增益 $G(0)=4$，試求此系統之轉移函數？

解 設 $G(s)=\dfrac{K(s+3)}{(s+1)(s+2)^2}$，則 $G(0)=\dfrac{K\cdot 3}{1\cdot 2^2}=\dfrac{3K}{4}=4\Rightarrow K=\dfrac{16}{3}$

$\Rightarrow G(s)=\dfrac{16(s+3)}{3(s+1)(s+2)^2}$

範例 2-4

一系統輸入 $u(t)$ 與輸出 $y(t)$ 之關係如下所示

$y'''(s)+6y''(t)+11y'(t)+6y(t)=u'(t)-2u(t)$，試求此系統之轉移函數？

解 令初始條件為零，並將微分方程式等號兩端取拉氏轉換可得

$$\Rightarrow s^3Y(s)+6s^2Y(s)+11sY(s)+6Y(s)=sU(s)-2U(s)$$

$$\Rightarrow (s^3+6s^2+11s+6)Y(s)=(s-2)U(s)$$

$$\Rightarrow G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{s-2}{s^3+6s^2+11s+6}$$

隨堂練習

一電路系統之電壓與電流之微分方程式的拉氏轉換為：

$V(s)(3s+1)+2=I(s)(5s+4)$，則此電路原來之微分方程式為何？

(A) $v=5i'+4$ (B) $v+3v'+2=5i'+4i$ (C) $v+3v'=5i'+4i$

(D) $v+3v'+2=5i+4$。

答： 原式 $\Rightarrow 3sV(s)+V(s)+2=5sI(s)+4I(s)$

取反拉氏轉換可得 $3v'+v+2\delta(t)=5i'+4i$，其中 $2\delta(t)$ 為脈衝信號，應視為雜訊，故電路原來之微分方程式為：$v+3v'=5i'+4i$，選(C)

重點整理提示：

◎ 系統轉移函數的定義為何？

◎ 如何從微分方程式得出轉移函數？

◎ 如何從轉移函數得出微分方程式？

◎ 系統轉移函數的極點、零點的定義為何？

◎ 系統轉移函數的特性為何？

2-5-4 系統轉移函數與輸出響應之間的關係

前述章節已經定義了幾種基本信號函數並說明其特性，以下討論這些信號的輸響應(output response)彼此間之關係及其與系統轉移函數的關連性。

(1) 單位脈衝響應(unit impulse response) $g(t)$：當系統輸入信號為單位脈衝信號時，亦即 $u(t)=\delta(t)$，此時系統的輸出信號稱為單位脈衝響應。

(2) 單位步階響應(unit step response) $y_s(t)$：當系統輸入信號為單位步階信號時，亦即 $u(t)=u_s(t)$，此時系統的輸出信號稱為單位步階響應。

(3) 轉移函數與單位脈衝響應之關係：
系統輸入信號為單位脈衝信號，$u(t)=\delta(t)\Rightarrow \mathcal{L}\{u(t)\}=\mathcal{L}\{\delta(t)\}=1$，則可以得到

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}\Rightarrow Y(s)=G(s)U(s)=G(s)\cdot 1=G(s)$$

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}=g(t)$$

由以上討論可得知：<u>系統轉移函數即為單位脈衝響應之拉式轉換</u>。

(4) 單位脈衝響應與單位步階響應之關係：
系統輸入信號為單位步階信號，$u(t)=u_s(t)\Rightarrow \mathcal{L}\{u(t)\}=\mathcal{L}\{u_s(t)\}=\frac{1}{s}$，則可以得到 $G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}\Rightarrow Y(s)=G(s)U(s)=G(s)\cdot\frac{1}{s}=\frac{G(s)}{s}$

$$y_s(t)=\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{y_s(t)\}=\frac{G(s)}{s}=\frac{1}{s}\mathcal{L}\{g(t)\}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{g(t)\}=G(s)=s\,\mathcal{L}\{y_s(t)\}=\mathcal{L}\left\{\frac{d\left[y_s(t)\right]}{dt}\right\}$$

$$\Rightarrow g(t)=\frac{d\left[y_s(t)\right]}{dt}$$

由以上討論可得知：<u>**系統單位脈衝響應即為單位步階響應之微分**</u>。

(5) 轉移函數與單位步階響應之關係：
綜合前述，系統轉移函數即為單位脈衝響應之拉式轉換，而單位脈衝響應即為單位步階響應之微分，所以轉移函數與單位步階響應之關係為
$\mathcal{L}\{g(t)\}=G(s)=s\,\mathcal{L}\{y_s(t)\}$

(6) 當系統輸入信號為單位斜坡信號時，亦即 $u(t)=r_a(t)$，此時系統的輸出信號稱為單位斜坡響應(unit ramp response)，$y_r(t)$。同理也可以定義出系統的單位拋物線響應(unit parabolic response)，$y_{pa}(t)$。

(7) 單位步階響應與單位斜坡響應之關係：

$$u(t)=r_a(t)\Rightarrow \mathcal{L}\{u(t)\}=\mathcal{L}\{r_a(t)\}=\frac{1}{s^2}$$

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}\Rightarrow Y(s)=G(s)U(s)=\frac{G(s)}{s^2}$$

$$y_r(t)=\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s^2}\right\}$$

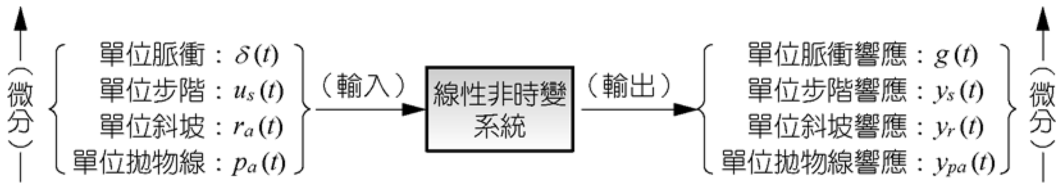
$$\Rightarrow \mathcal{L}\{y_r(t)\}=\frac{G(s)}{s^2}=\frac{1}{s}\cdot\frac{G(s)}{s}=\frac{1}{s}\mathcal{L}\{y_s(t)\}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{y_s(t)\}=s\,\mathcal{L}\{y_r(t)\}=\mathcal{L}\left\{\frac{d\left[y_r(t)\right]}{dt}\right\}$$

$$\Rightarrow y_s(t)=\frac{d\left[y_r(t)\right]}{dt}$$

由以上討論可得知：**系統單位步階響應即為單位斜坡響應之微分**。同理吾人亦可以導證出**系統單位斜坡響應即為單位拋物線響應之微分**。

對線性非時變系統而言，吾人可以將上述輸入信號與輸出響應之間的關係，以下圖來表示。



隨堂練習

試導證線性非時變系統的單位斜坡響應即為單位拋物線響應之微分。